JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BOUQUET

Remarques sur les systèmes de droites dans l'espace

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 125-128.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__125_0>

REMARQUES
SUR LES SYSTÈMES DE DROITES DANS L'ESPACE;

PAR M. J. BOUQUET,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

I.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases}$$

les équations d'une série de droites, a, b, p, q étant fonctions d'un paramètre arbitraire t. Prenons une autre droite de la série correspondant à la valeur $t + \Delta t$ du paramètre,

$$(2)\qquad \begin{cases} x = (a + \Delta a) z + p + \Delta p, \\ y = (b + \Delta b) z + q + \Delta q. \end{cases}$$

La condition pour que ces droites se coupent est

$$(3)\qquad \Delta a \Delta q - \Delta b \Delta p = 0,$$

ou

$$(4)\qquad \frac{\Delta a}{\Delta b} = \frac{\Delta p}{\Delta q}.$$

Cette expression (3) est le numérateur de la plus courte distance de deux droites. La plus courte distance est donc

$$(5)\qquad \rho = \frac{\Delta a \Delta q - \Delta b \Delta p}{M \Delta t},$$

M étant une quantité finie.

II.

Cherchons la condition pour que les droites de la série (1) soient tangentes à une même courbe dans l'espace. Appelons x, y, z les coordonnées du point de contact d'une droite particulière; ces coordonnées sont des fonctions de t variant en même temps que a, b, p, q. On a donc

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dx = a\,dz + z\,da + dp, \\ dy = b\,dz + z\,db + dq; \end{array} \right.$$

dx, dy, dz représentent, dans les équations (6), les variations en passant d'un point de la courbe à un point voisin, aussi sur la courbe. Passons maintenant du point x, y, z au point voisin sur la droite (1), on aura

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dx = a\,dz, \\ dy = b\,dz. \end{array} \right.$$

Pour que la droite soit tangente à la courbe, il faut que ces deux sortes de variations soient les mêmes; il faut donc que

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} z\,da + dp = 0, \\ z\,db + dq = 0, \end{array} \right.$$

d'où la condition cherchée

$$(9) \qquad da\,dq - db\,dp = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{da}{db} = \frac{dp}{dq}.$$

III.

La plus courte distance (5) peut s'écrire

$$\rho = \frac{1}{\mathrm{M}dt} \left\{ \begin{array}{l} \left(da + \frac{1}{2} d^2a + \frac{1}{2.3} d^3a + \ldots\right)\left(dq + \frac{1}{2} d^2q + \ldots\right) \\ - \left(db + \frac{1}{2} d^2b + \frac{1}{2.3} d^3b + \ldots\right)\left(dp + \frac{1}{2} d^2p + \ldots\right) \end{array} \right\},$$

$$\rho = \frac{1}{\mathrm{M}dt}\left[(da\,dq - db\,dp) + \frac{1}{2}(d^2a\,dq + d^2q\,da - d^2b\,dp - d^2p\,db) + \cdots\right].$$

Si l'équation de condition (9) a lieu, le premier terme de ρ est nul; le second est nul aussi, comme étant la différentielle du premier. Donc

THÉORÈME. *La plus courte distance entre deux droites consécutives tangentes à une même courbe est généralement un infiniment petit du troisième ordre.*

IV.

Supposons qu'en même temps que la condition (9) a lieu, le terme du troisième ordre soit nul,

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{1.2.3}(d^3a\,dq + d^3q\,da - d^3b\,dp - d^3p\,db) \\ + \dfrac{1}{1.2}\dfrac{1}{1.2}(d^2a\,d^2q - d^2b\,d^2p) = 0. \end{cases}$$

Le second terme différentié donne

$$(d^3a\,dq + d^3q\,da - d^3b\,dp - d^3p\,db) + 2\,(d^2a\,d^2q - d^2b\,d^2p) = 0.$$

De cette équation, combinée avec la précédente, il résulte

$$(11)\qquad d^2a\,d^2q - d^2b\,d^2p = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2a}{d^2b} = \frac{d^2p}{d^2q}.$$

L'équation (11) exprime que la courbe est plane. En effet, en différentiant les équations (8), on a

$$d^2p = -z\,d^2a - da\,dz,$$
$$d^2q = -z\,d^2b - db\,dz;$$

l'équation (11), ou

$$\frac{d^2p}{d^2a} = \frac{d^2q}{d^2b},$$

devient ainsi

$$(12)\qquad \frac{d^2a}{da} = \frac{d^2b}{db},$$

laquelle donne, par l'intégration,

$$(13)\qquad \begin{cases} da = \mathrm{K}\,db, \\ a = \mathrm{K}b + \mathrm{L}, \\ dx = \mathrm{K}\,dy + \mathrm{L}\,dz, \\ x = \mathrm{K}y + \mathrm{L}z + \mathrm{N}, \end{cases}$$

K, L, N étant des constantes arbitraires.

Théorème. *Lorsque la plus courte distance entre les tangentes consécutives à une même courbe est un infiniment petit d'un ordre supérieur au troisième, la courbe est plane, et par conséquent la plus courte distance est rigoureusement nulle.*

V.

On peut arriver directement à la même conséquence. Des deux conditions (9) et (11) nous avons déduit

$$da = \mathrm{K}\, db, \qquad dp = \mathrm{K}\, dq;$$

par la différentiation, on obtient

$$d^2a = \mathrm{K}\, d^2b, \quad d^2p = \mathrm{K}\, d^2q,$$
$$d^3a = \mathrm{K}\, d^3b, \quad d^3p = \mathrm{K}\, d^3q,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il en résulte

$$\frac{da}{db} = \frac{d^2a}{d^2b} = \frac{d^3a}{d^3b} = \ldots = \frac{dp}{dq} = \frac{d^2p}{d^2q} = \frac{d^3p}{d^3q} = \ldots,$$

et, par suite,

$$\frac{da + \frac{1}{1.2} d^2a + \frac{1}{1.2.3} d^3a + \ldots}{db + \frac{1}{1.2} d^2b + \frac{1}{1.2.3} d^3b + \ldots} = \frac{dp + \frac{1}{1.2} d^2p + \frac{1}{1.2.3} d^3p + \ldots}{dq + \frac{1}{1.2} d^2q + \frac{1}{1.2.3} d^3q + \ldots},$$

ou

$$\frac{\Delta a}{\Delta b} = \frac{\Delta p}{\Delta q}.$$

La plus courte distance est donc identiquement nulle.