JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Nouvelles démonstrations des deux équations relatives aux tangentes communes à deux surfaces du second degré homofocales ; - Et propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de ces surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 105-119.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__105_0>

Nouvelles démonstrations des deux équations relatives aux tangentes communes à deux surfaces du second degré homofocales ; — Et propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de ces surfaces ;

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXII, p. 313 et 517.)

Les deux équations en question sont, d'après les notations employées dans mes précédentes communications,

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2, \tag{1}$$

$$\mathrm{PD} = \frac{abc}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}. \tag{2}$$

J'ai démontré la première équation en la déduisant d'un théorème plus général, relatif à tous les points d'un plan ; et j'en ai conclu la seconde au moyen de l'équation

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = a^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{\mathrm{P}^2 \mathrm{D}^2}, \tag{3}$$

relative à une tangente quelconque à une surface du second degré.

Je me propose maintenant :

1°. De donner une nouvelle démonstration, extrêmement simple, de l'équation (1) ;

2°. De démontrer *directement* l'équation (2) ;

Et 3°. De faire connaître une nouvelle propriété commune aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure d'une surface du second degré, qui se déduit naturellement de ma nouvelle manière de démontrer l'équation (1), et donne lieu à quelques corollaires intéressants.

Je m'appuierai sur le théorème suivant qui exprime une belle propriété des surfaces du second degré homofocales.

THÉORÈME. *Étant données trois surfaces homofocales* (ν), (a), (a′) (*c'est-à-dire dont les demi-axes majeurs sont* ν, a, a′), *si par une tangente quelconque à la première, on mène le plan tangent à cette surface et deux plans tangents aux deux autres surfaces, respectivement, les inclinaisons de ces deux plans sur le premier auront leurs sinus dans un rapport constant, égal à*

$$\frac{\sqrt{\nu^2 - a^2}}{\sqrt{\nu^2 - a'^2}}.$$

Ce théorème est susceptible de plusieurs conséquences que je n'examinerai pas ici; je passe tout de suite à l'objet de cette Note [*].

I. — *Démonstration de l'équation* $\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$.

Concevons la tangente T commune aux deux surfaces (ρ) et (α). Soit m son point de contact sur la surface (ρ); μ et ν sont les paramètres des deux lignes de courbure de cette surface, qui se croisent en ce point, c'est-à-dire les demi-axes majeurs des deux surfaces (μ), (ν) qui déterminent ces deux lignes de courbure. La normale au point m est tangente à la surface (ν); les plans tangents aux deux surfaces (α) et (μ), menés par cette droite, font avec le plan tangent à la surface (ν) deux angles dont le rapport des sinus (d'après le théorème précédent)

[*] Ayant donné, dans mon *Aperçu historique* (page 395, art. 43), une proposition qui forme un cas particulier de ce théorème, le cas où la première surface devenant infiniment aplatie se réduit à un plan, j'ai fait remarquer que cette proposition, et une autre, n'avaient pas toute la généralité désirable (*Ibid.*, art. 45); puis, dans une Note à la fin de la partie historique de l'ouvrage (p. 556), j'ai annoncé être parvenu à la généralisation de ces deux propositions, et j'ai énoncé un théorème duquel cette généralisation se déduisait sans peine. Depuis, l'une des deux propositions généralisées a été le fondement d'une théorie géométrique de l'attraction des ellipsoïdes, et particulièrement d'une démonstration directe du théorème de Maclaurin. L'autre, qui est celle que je rappelle ici, est susceptible d'une application également intéressante, puisqu'elle conduit naturellement aux propriétés des lignes géodésiques des surfaces du second degré.

est égal à

$$\frac{\sqrt{\nu^2-\alpha^2}}{\sqrt{\nu^2-\mu^2}}.$$

Or, le second de ces angles est droit; on a donc, en désignant le premier par i',

$$\sin i' = \frac{\sqrt{\nu^2-\alpha^2}}{\sqrt{\nu^2-\mu^2}};$$

d'où

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 (1 - \sin^2 i') = \alpha^2.$$

Le plan tangent à la surface (α) passe par la tangente T, i' est donc l'angle que cette tangente fait avec la ligne de courbure (ν); soit i'' l'angle qu'elle fait avec la seconde ligne de courbure (μ); on aura $\cos i' = \sin i''$, et l'équation devient

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2.$$

C. Q. F. D.

Observations. L'équation $\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$ exprime la solution de ce problème : *Déterminer, en un point d'une surface du second degré* (ρ), *la direction des tangentes à la surface, qui vont toucher une seconde surface homofocale.* Car cette direction est celle que déterminent les angles i' et i'' (lesquels se réduisent à un seul, puisqu'ils sont compléments l'un de l'autre). L'équation donne $\operatorname{tang} i' = \frac{\sqrt{\nu^2-\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2-\mu^2}}$.

Si maintenant on exprime cet angle i' par le rapport des arcs ds', ds'' des deux lignes de courbure (μ), (ν), qui sont les projections de l'élément mm' de la tangente, comme l'a fait M. Liouville [*], on a $\operatorname{tang} i' = \frac{ds'}{ds''}$; donc $\frac{ds'}{\sqrt{\nu^2-\alpha^2}} = \frac{ds''}{\sqrt{\alpha^2-\mu^2}}$; ou, en mettant pour ds' et ds'' leurs expressions connues [**],

$$\frac{\sqrt{\mu^2-\rho^2}\,.\,d\mu}{\sqrt{\mu^2-\alpha^2}\sqrt{\mu^2-\varepsilon^2}\sqrt{\mu^2-\varepsilon_1^2}} = \frac{\sqrt{\nu^2-\rho^2}\,.\,d\nu}{\sqrt{\nu^2-\alpha^2}\sqrt{\nu^2-\varepsilon^2}\sqrt{\nu^2-\varepsilon_1^2}}.$$

---

[*] *Journal de Mathématiques*, t. IX, décembre 1844.

[**] Les expressions de ds' et ds'' se peuvent obtenir très-simplement, et sans calculs, par de seules considérations de Géométrie que j'indiquerai dans un autre moment.

Cette équation différentielle exprime le rapport $\frac{d\mu}{d\nu}$ qui détermine sur la surface (ρ), à partir d'un point (μ, ν), la direction de l'élément qui, prolongé, ira toucher une seconde surface homofocale (α). Et l'intégrale de cette équation représentera une courbe dont tous les éléments, ou, en d'autres termes, dont toutes les tangentes, iront toucher cette surface (α). Cette courbe sera la ligne géodésique : mais les considérations précédentes étaient nécessaires pour donner une signification géométrique à l'équation différentielle.

On arrive donc avec une extrême facilité, et par une marche naturelle, au beau résultat de M. Jacobi, qui avait pu paraître devoir être plus particulièrement du domaine de l'analyse, puisque c'est par cette méthode que divers géomètres ont traité cette question.

II. — *Démonstration de l'équation* $\mathrm{PD} = \frac{abc}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}$.

Concevons les deux cylindres circonscrits aux deux surfaces (a), (α), qui ont leurs arêtes parallèles à la tangente T commune à ces deux surfaces. Les bases de ces cylindres sur un même plan perpendiculaire à leurs arêtes sont deux coniques, une ellipse et une hyperbole, décrites des mêmes foyers [*]. Ces deux courbes se croisent au point M où leur plan rencontre la tangente T. La différence des carrés de leurs demi-axes majeurs est égale au carré du demi-diamètre de l'ellipse conjugué à celui qui aboutit au point M [**]. Or, cette différence est égale à la différence des carrés des demi-axes majeurs des deux surfaces, savoir, $(a^2 - \alpha^2)$ [***]. On a donc, en appelant OM_1 le demi-diamètre conjugué à OM, $\mathrm{OM}_1 = \sqrt{a^2 - \alpha^2}$. Le produit $\pi.\mathrm{P}.\mathrm{OM}_1$ ex-

---

[*] *Aperçu historique,* page 392, art. 35.

[**] Cela résulte directement de deux propositions démontrées dans mon *Aperçu historique,* pages 360 et 361; ou bien encore du théorème général dont je me suis servi dans ma première communication. (*Comptes rendus,* t. XXII, page 65.)

[***] Cela résulte de ce théorème général : *Quand deux surfaces sont homofocales, si on leur mène deux plans tangents parallèles entre eux, la différence des carrés des distances de ces deux plans au centre commun des deux surfaces sera constante, quelle que soit leur direction commune.* (*Aperçu historique,* p. 393.)

prime l'aire de l'ellipse; et $2\pi \mathrm{P.D.}\sqrt{a^2 - \alpha^2}$ le volume du cylindre qui a pour base l'ellipse, et pour hauteur le diamètre 2D de la surface (a). Ce cylindre est circonscrit à cette surface; conséquemment, son volume est constant et égal à $2\pi abc$. D'où il suit que l'on a

$$\mathrm{PD} = \frac{abc}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}} \text{ [*]}.$$

C. Q. F. D.

III. — *Propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure des surfaces du second degré.*

Du théorème énoncé au commencement de cette Note, et sur lequel est fondée la démonstration de l'équation (1), on conclut la propriété suivante des tangentes communes à deux surfaces homofocales :

Si, par chaque tangente commune à deux surfaces homofocales, on mène un plan faisant avec le plan tangent à la première surface mené par la tangente commune, un angle de grandeur constante, ce plan sera constamment tangent à une même surface homofocale aux proposées.

Les tangentes à une ligne de courbure d'une surface du second degré sont toutes tangentes à une seconde surface homofocale; donc :

Si par chaque point d'une ligne de courbure d'une surface du second degré, on mène un plan tangent à cette courbe, faisant avec la surface, en ce point, un angle de grandeur donnée et constante,

---

[*] Soit Δ le demi-diamètre parallèle à la tangente conjuguée à la tangente T : on a, comme on sait, $\mathrm{PD}\,\Delta \sin(\mathrm{D}, \Delta) = abc$. Donc, $\Delta \sin(\mathrm{D}, \Delta) = \sqrt{a^2 - \alpha^2}$.

Si T est une tangente à la ligne de courbure déterminée sur (a) par la surface (α), l'angle (D, Δ) est droit, et l'on a $\Delta = \sqrt{a^2 - \alpha^2}$. Pareillement, soit (α_1) la surface qui détermine, au même point, la seconde ligne de courbure de la surface (a); on aura $\mathrm{D} = \sqrt{a^2 - \alpha_1^2}$. On peut écrire $\alpha^2 = a^2 - \Delta^2$, $\alpha_1^2 = a^2 - \mathrm{D}^2$. Ces expressions des demi-axes majeurs des deux surfaces homofocales qui passent par un point d'une surface donnée, résultent encore immédiatement des propriétés de l'ellipse constante considérée dans le théorème général sur lequel repose ma première démonstration de l'équation $\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$. (Voir *Comptes rendus*, t. XXII, p. 65.) Du reste, ces expressions se trouvent dans le Mémoire de M. Joachimsthal.

tous ces plans envelopperont une surface du second degré homofocale à la proposée.

Il suit de là que :

Si par les tangentes à une conique décrite dans un plan principal d'une surface du second degré, des mêmes foyers que la focale comprise dans ce plan, on mène des plans tangents à la surface, tous ces plans feront des angles égaux avec le plan principal.

Car la conique peut être considérée comme une ligne de courbure de la surface infiniment aplatie que représente la focale.

Les tangentes à une ligne géodésique d'une surface du second degré sont toutes tangentes à une seconde surface homofocale. Donc :

Si en chaque point d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré on mène, par la tangente à la courbe, un plan faisant avec la surface, en ce point, un angle de grandeur donnée et constante, tous ces plans envelopperont une seconde surface du second degré homofocale à la proposée.

Cette surface sera la même pour toutes les lignes géodésiques dont les équations auront la même constante α.

Soit une surface de révolution autour de son axe majeur, ayant par conséquent deux foyers. Ces deux foyers peuvent être considérés comme les sommets d'une surface homofocale à la proposée, et qui, ayant deux axes nuls, se réduit à une ligne droite. Conséquemment, tout plan mené par l'un des foyers est un plan tangent à la surface. D'après cela, on conclut du théorème précédent que :

Une ligne géodésique tracée sur un ellipsoïde, ou un hyperboloïde à deux nappes, de révolution autour de l'axe majeur, jouit de la propriété, que le cône qui passe par cette courbe, et qui a son sommet en l'un des deux foyers de la surface, coupe la surface partout sous le même angle.

Cette propriété est caractéristique et peut servir à définir les lignes géodésiques sur les deux surfaces de révolution.

Autre démonstration de l'équation $\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$ [*], *et propriétés qui en dérivent.*

(Séance du 23 mars 1846.)

Cette nouvelle démonstration repose sur une propriété des surfaces homofocales, dont voici l'énoncé :

Théorème. *Étant donnée une surface du second degré* (α), *si par un point de l'espace on mène une droite faisant, avec les normales aux trois surfaces homofocales* (ρ), (μ) *et* (ν) *qui passent par ce point, des angles* i, i', i'', *le segment* EE', *que la surface* (α) *intercepte sur cette droite, divisé par le carré du demi-diamètre* Oe, *qui lui est parallèle, a pour expression*

$$\frac{\mathrm{EE}'}{\overline{\mathrm{O}e}^2} = \frac{2\sqrt{(\alpha^2-\rho^2)(\alpha^2-\mu^2)(\alpha^2-\nu^2)}}{\alpha6\gamma}\sqrt{\frac{\cos^2 i}{\rho^2-\alpha^2}+\frac{\cos^2 i'}{\mu^2-\alpha^2}+\frac{\cos^2 i''}{\nu^2-\alpha^2}},$$

$\alpha, 6, \gamma$ *étant les trois demi-axes principaux de la surface* (α) [**].

Ce théorème fournit immédiatement la démonstration de l'équation proposée, et conduit ensuite à une propriété des tangentes communes à deux surfaces homofocales, concernant les segments qu'une troisième surface homofocale détermine sur ces tangentes; et cette propriété s'applique naturellement aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure des surfaces du second degré.

I. — *Démonstration de l'équation* $\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$.

Concevons, dans le théorème ci-dessus, que la transversale menée par le point (ρ, μ, ν) soit tangente à la surface (α), on aura $\mathrm{EE}' = 0$, et

$$\frac{\cos^2 i}{\rho^2-\alpha^2}+\frac{\cos^2 i'}{\mu^2-\alpha^2}+\frac{\cos^2 i''}{\nu^2-\alpha^2} = 0.$$

---

[*] Voir pages 5 et 105 de ce volume.

[**] Ce théorème se trouve démontré dans mon *Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes*, présenté à l'Académie des Sciences, le 11 décembre 1837, et inséré dans le tome IX du *Recueil des Savants étrangers*. Voir pages 659 et 661.

Cette équation peut être considérée comme l'équation du cône circonscrit à la surface (α), qui aurait son sommet au point (ρ, μ, ν), puisqu'elle détermine toutes les tangentes à cette surface, qu'on peut mener par ce point.

Pour celles de ces tangentes qui sont comprises dans le plan tangent à la surface (ρ) et qui, dès lors, se trouvent tangentes à la fois aux deux surfaces (α) et (ρ), on a $i = 90^\circ$, $\cos i = 0$, et

$$\frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i''}{\nu^2 - \alpha^2} = 0;$$

ou

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = 0.$$

C. Q. F. D.

Remarque. Une droite dans l'espace sera représentée par les deux équations

$$\frac{\cos^2 i}{\rho^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i''}{\nu^2 - \alpha^2} = 0,$$

$$\frac{\cos^2 i}{\rho^2 - \alpha_1^2} + \frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \alpha_1^2} + \frac{\cos^2 i''}{\nu^2 - \alpha_1^2} = 0,$$

qui expriment que la droite est menée par le point (ρ, μ, ν), tangentiellement aux deux surfaces (α) et (α_1).

Ces équations se transforment en deux équations différentielles, où ρ, μ, ν sont les variables, si l'on remplace les cosinus par les projections ds, ds', ds'' d'un élément de la droite, sur les normales aux trois surfaces (ρ), (μ), (ν), puis ces éléments ds, ds', ds'' par leurs expressions connues, en ρ, μ, ν, $d\rho$, $d\mu$, $d\nu$.

II. — *Propriété générale des tangentes communes à deux surfaces homofocales.*

L'équation $\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$ détermine donc, sur le plan tangent à la surface (ρ), la direction d'une tangente commune aux deux surfaces (ρ) et (α). Concevons une troisième surface homofocale (α_1); soit $E_1 E'_1$ le segment qu'elle intercepte sur cette tangente, et nommons Oe_1 son demi-diamètre parallèle à cette droite, on aura

$$\frac{E_1 E'_1}{\overline{Oe_1}^2} = \frac{2\sqrt{(\alpha_1^2 - \rho^2)(\alpha_1^2 - \mu^2)(\alpha_1^2 - \nu^2)}}{\alpha_1 6_1 \gamma_1} \sqrt{\frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \alpha_1^2} + \frac{\cos^2 i''}{\nu^2 - \alpha_1^2}}.$$

Or

$$\cos^2 i' = \frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu^2 - \nu^2} \quad \text{et} \quad \cos^2 i'' = \frac{\nu^2 - \alpha^2}{\nu^2 - \mu^2},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\cos^2 i'}{\mu^2 - \alpha_1^2} + \frac{\cos^2 i''}{\nu^2 - \alpha_2^2} = \frac{\alpha^2 - \alpha_1^2}{(\mu^2 - \alpha_1^2)(\nu^2 - \alpha_1^2)};$$

il vient donc

$$\frac{\mathrm{E}_1\mathrm{E}'_1}{\overline{\mathrm{O}e_1}^2} = \frac{2\sqrt{\alpha_1^2 - \rho^2}\sqrt{\alpha^2 - \alpha_1^2}}{\alpha_1 6_1 \gamma_1}.$$

Le second membre, ne contenant plus μ et ν, est indépendant de la position du point (μ, ν) sur la surface (ρ). Ainsi l'équation exprime ce théorème général :

THÉORÈME. *Les tangentes communes à deux surfaces homofocales jouissent de la propriété, que, les segments qu'une troisième surface homofocale intercepte sur ces droites sont proportionnels aux carrés des demi-diamètres de cette surface qui leur sont parallèles.*

III. — *Corollaires du théorème précédent.*

Les tangentes communes aux deux surfaces (ρ) et (α) peuvent les toucher en des points de leur ligne d'intersection, laquelle est une ligne de courbure sur chacune des deux surfaces. On en conclut donc que :

Si l'on conçoit les tangentes à une ligne de courbure d'une surface du second degré, une seconde surface homofocale interceptera sur ces tangentes des segments proportionnels aux carrés de ses demi-diamètres parallèles à ces tangentes, respectivement [*].

Que la ligne de courbure soit une section principale de la surface, on en conclut cette propriété des coniques homofocales, savoir que :

Les cordes d'une conique, qui, divisées par les carrés des diamètres parallèles, donnent des quotients égaux, enveloppent une seconde conique homofocale à la première.

---

[*] J'étais déjà parvenu à ce théorème dans le Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes, cité précédemment. (Voir *Recueil des Savants étrangers*, tome IX, page 668.)

La seconde conique peut avoir son petit axe nul et se réduire à l'excentricité de la première; donc :

Dans une conique, les cordes qui passent par un foyer sont proportionnelles aux carrés des diamètres qui leur sont parallèles.

Que les deux surfaces (ρ), (α) soient les deux focales de la surface (α_1); toute droite qui s'appuie sur ces deux courbes peut être considérée comme une tangente commune aux deux surfaces qu'elles représentent. On a donc cette propriété des deux focales d'une surface du second degré, savoir, que : *Toute corde de la surface, qui s'appuie sur ces deux courbes, a sa longueur proportionnelle au carré du diamètre de la surface parallèle à cette corde.*

Les tangentes à une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré sont tangentes à une seconde surface homofocale; donc :

Les tangentes à une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré jouissent de la propriété, qu'une surface homofocale quelconque intercepte sur ces droites des segments proportionnels aux carrés de ses diamètres parallèles à ces droites.

Considérons un hyperboloïde à une nappe; chacune de ses génératrices est une ligne géodésique, les tangentes à cette ligne se confondent avec la génératrice elle-même, et la surface homofocale que ces tangentes vont toucher, d'après le théorème général sur les lignes géodésiques, est l'hyperboloïde lui-même. Ce qu'on reconnaît aisément, en vérifiant que, pour déterminer sur un hyperboloïde (ρ) ses génératrices, il faut faire $\alpha = \rho$ dans l'équation générale des lignes géodésiques

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2.$$

Ainsi, nous pouvons considérer les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe, comme les tangentes à des lignes géodésiques d'un même système, c'est-à-dire qui admettent la même constante α, qui ici est égale à ρ. On conclut donc du théorème précédent, que :

Étant donné un hyperboloïde à une nappe, si l'on décrit une surface homofocale (ellipsoïde, ou hyperboloïde à deux nappes), les segments qu'elle interceptera sur les génératrices de l'hyperboloïde seront proportionnels aux carrés des diamètres de cette surface, parallèles à ces génératrices.

Si dans l'équation intégrale de la ligne géodésique on suppose $\alpha = \rho$, elle se simplifie et devient

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-\varepsilon^2)(\mu-\varepsilon_1^2)}} = \int \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2-\varepsilon^2)(\nu^2-\varepsilon_1^2)}} + C.$$

Ainsi les génératrices de l'hyperboloïde à une nappe s'expriment par une équation en fonctions elliptiques, de même que les tangentes à une conique sur le plan.

Cela forme un troisième cas où l'équation de la ligne géodésique se ramène aux fonctions elliptiques.

Le rapport $\frac{\overline{Oe}^2}{EE'}$, dans les théorèmes qui précèdent, peut se remplacer par un seul segment formé sur la corde EE'; de sorte que les théorèmes prendront de nouveaux énoncés dans lesquels ce seront des segments égaux que l'on aura à considérer. En effet, concevons que la surface (α) soit l'enveloppe d'une couche infiniment mince qui ait pour paroi interne une surface semblable, concentrique et semblablement placée; soient EE' une corde de la surface (α), Oe le demi-diamètre parallèle, et dr le segment infiniment petit compris sur cette corde, entre les deux parois de la couche; on trouve aisément cette expression de dr,

$$dr = 2\,\frac{\overline{Oe}^2}{EE'}\,\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Donc, quand le rapport $\frac{EE'}{\overline{Oe}^2}$ sera constant, comme dans les théorèmes précédents, le segment dr sera de longueur constante. On conclut de là plusieurs théorèmes dont nous ne citerons que celui-ci, qui se rapporte au plan :

Si entre deux coniques semblables, concentriques et semblablement placées, et dont la différence des axes est infiniment petite, on inscrit des segments infiniment petits, mais de même longueur, ces segments prolongés envelopperont une conique homofocale à la courbe externe.

La couche comprise entre deux surfaces semblables du second degré, comme nous l'avons dit, est précisément la couche que forme l'électricité à la surface d'un corps conducteur. On conclut de là quelques conséquences relatives à cette couche électrique; par exemple, que : *La couche formée à la surface d'un ellipsoïde de révolution a partout la même épaisseur, dans le sens des rayons vecteurs issus des foyers.*

Démonstration de quelques propositions relatives aux surfaces du second degré homofocales.

Je vais démontrer quelques propositions dont j'ai fait usage dans le Mémoire qui précède.

I. — *Théorème relatif aux plans tangents à deux surfaces homofocales, menés parallèlement entre eux.*

Théorème. *Quand deux plans tangents à deux surfaces homofocales sont parallèles, la différence des carrés de leurs distances au centre commun des deux surfaces est constante et égale à la différence des carrés des demi-axes majeurs des deux surfaces.*

Soient p, p' les perpendiculaires abaissées du centre des deux surfaces (a), (a') sur deux plans tangents à ces surfaces, respectivement, et parallèles entre eux; je dis qu'on aura

$$p^2 - p'^2 = a^2 - a'^2.$$

En effet, soient α, β, γ les angles que la perpendiculaire p fait avec les deux axes principaux de la surface (a); on a

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma;$$

a, b, c étant les trois demi-axes de la surface.

On a de même

$$p'^2 = a'^2 \cos^2 \alpha + b'^2 \cos^2 \beta + c'^2 \cos^2 \gamma.$$

Donc

$$p^2 - p'^2 = (a^2 - a'^2) \cos^2 \alpha + (b^2 - b'^2) \cos^2 \beta + (c^2 - c'^2) \cos^2 \gamma.$$

Mais, puisque les deux surfaces sont homofocales, on a

$$b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2 = a^2 - a'^2;$$

donc

$$p^2 - p'^2 = (a^2 - a'^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma),$$
$$p^2 - p'^2 = a^2 - a'^2.$$

C. Q. F. P.

L'expression de la perpendiculaire p, c'est-à-dire l'équation

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma,$$

peut se démontrer de plusieurs manières. En voici une démonstration très-simple: Le second membre exprime la somme des carrés des projections des trois demi-axes principaux de la surface sur la droite p. Cette somme, comme on sait, est égale à la somme des carrés des projections de trois demi-diamètres conjugués quelconques, sur la même droite. Qu'on prenne pour l'un de ces trois demi-diamètres, le demi-diamètre qui aboutit au point de contact du plan tangent à la surface; la projection de ce demi-diamètre sera précisément la perpendiculaire p, et les deux autres demi-diamètres, conjugués à celui-là, auront leurs projections nulles, parce qu'ils sont dans le plan diamétral perpendiculaire à cette droite p. L'équation se trouve donc démontrée.

II. — *Expression des demi-diamètres d'une surface, parallèles aux lignes de courbure en un point.*

Soient (μ), (ν) les surfaces qui déterminent les lignes de courbure en un point m d'une surface (ρ); D, D′ les demi-diamètres de cette surface, parallèles, inversement, à ces deux lignes de courbure, de sorte que D soit parallèle à la normale à la surface (μ), et D′ à la normale à la surface (ν); on aura

$$D = \sqrt{\rho^2 - \mu^2}, \quad D' = \sqrt{\rho^2 - \nu^2}.$$

Ces expressions résultent immédiatement de la considération de l'ellipse constante dont il a été question dans mes premières recherches sur les lignes géodésiques (*voir* p. 7 de ce volume); et elles se peuvent démontrer de bien d'autres manières. La démonstration suivante est peut-être la plus simple, parce qu'elle ne repose que sur le théorème précédent, qui est lui-même d'une démonstration immédiate et, on pourrait dire, intuitive.

Concevons le plan tangent à la surface (μ), au point m, et le plan parallèle à la surface ρ: soient q et p les distances de ces deux plans tangents au centre commun des deux surfaces; on aura $p^2 - q^2 = \rho^2 - \mu^2$. Il faut donc prouver que $D = \sqrt{p^2 - q^2}$. Or, si l'on projette trois demi-diamètres de la surface (ρ) sur la perpendiculaire p, la somme des carrés des projections sera égale au carré de cette droite. Prenons, pour les trois demi-diamètres, celui qui aboutit au point m, et les deux D, D′ qui sont dans le plan diamétral conjugué à celui-là. Le demi-diamètre D est parallèle à la normale, en m, à la surface (μ):

il est donc dirigé suivant la perpendiculaire p, et est lui-même sa projection sur cette droite; le second D′ est perpendiculaire au premier; par conséquent, sa projection est nulle; enfin la projection du demi-diamètre Om est égale à q; on a donc

$$p^2 = \mathrm{D}^2 + q^2, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{D}^2 = p^2 - q^2;$$

et, par suite,

$$\mathrm{D}^2 = \rho^2 - \mu^2.$$

C. Q. F. D.

III. — *Démonstration de l'expression* $p = \dfrac{\rho\sqrt{\rho^2-\varepsilon^2}\sqrt{\rho^2-\varepsilon_1^2}}{\sqrt{\rho^2-\mu^2}\sqrt{\rho^2-\nu^2}}$.

p représente la perpendiculaire abaissée du centre de la surface (ρ) sur son plan tangent au point (μ, ν); $\sqrt{\rho^2-\mu^2}$, $\sqrt{\rho^2-\nu^2}$ sont les demi-axes principaux de la section diamétrale parallèle à ce plan tangent; conséquemment le produit $p\sqrt{\rho^2-\mu^2}\sqrt{\rho^2-\nu^2}$ exprime le volume du parallélipipède construit sur ces deux demi-axes principaux et leur conjugué qui aboutit au point (μ, ν). Ce volume est égal à celui du parallélipipède construit sur les trois axes principaux de la surface, lequel a pour expression $\rho\sqrt{\rho^2-\varepsilon^2}\sqrt{\rho^2-\varepsilon_1^2}$. On a donc l'équation

$$p = \frac{\rho\sqrt{\rho^2-\varepsilon^2}\sqrt{\rho^2-\varepsilon_1^2}}{\sqrt{\rho^2-\mu^2}\sqrt{\rho^2-\nu^2}},$$

qu'il fallait démontrer [*].

IV. — *Démonstration de l'expression* $ds = \dfrac{\sqrt{\rho^2-\mu^2}\sqrt{\rho^2-\nu^2}\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-\varepsilon^2}\sqrt{\rho^2-\varepsilon_1^2}}$.

ds est l'élément mm' de la courbe d'intersection des deux surfaces (μ), (ν), compris entre les deux surfaces infiniment voisines (ρ) et $(\rho + d\rho)$. Les plans tangents à ces surfaces, menés par les points m, m', sont sensiblement parallèles; conséquemment on a, en appelant p et $(p + dp)$ leurs distances au centre commun des deux surfaces,

$$(p + dp)^2 - p^2 = (\rho + d\rho)^2 - \rho^2,$$

[*] Cette équation se trouve démontrée d'une autre manière dans mon Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes, cité précédemment. (Voir *Recueil des Savants étrangers*, tome IX, page 668.)

ou

$$pdp = \rho d\rho.$$

Or dp, distance des deux plans, est égale à l'élément mm', que nous représenterons par ds; on a donc

$$ds = \frac{\rho d\rho}{p},$$

ou, en mettant pour p sa valeur,

$$ds = \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}.d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \varepsilon^2}\sqrt{\rho^2 - \varepsilon_1^2}}.$$

C. Q. F. P.

Autrement. Concevons que l'élément mm' soit prolongé en ligne droite; et soit P le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O des surfaces sur cette droite. On aura $ds = mm' = \mathrm{P}m' - \mathrm{P}m$. On a dans le triangle rectangle O Pm,

$$\overline{\mathrm{P}m}^2 = \overline{\mathrm{O}m}^2 - \overline{\mathrm{OP}}^2;$$

et pareillement

$$\overline{\mathrm{P}m'}^2 = \overline{\mathrm{O}m'}^2 - \overline{\mathrm{OP}}^2,$$

d'où

$$\overline{\mathrm{P}m'}^2 - \overline{\mathrm{P}m}^2 = \overline{\mathrm{O}m'}^2 - \overline{\mathrm{O}m}^2.$$

Or les points m, m' sont, sur les deux surfaces ρ, $(\rho + d\rho)$, deux points *correspondants;* la différence des carrés de leurs distances au centre des deux surfaces est donc égale à la différence des carrés des demi-axes majeurs des deux surfaces. On a donc

$$\overline{\mathrm{P}m'}^2 - \overline{\mathrm{P}m}^2 = (\rho + d\rho)^2 - \rho^2;$$

et, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\mathrm{P}m(\mathrm{P}m' - \mathrm{P}m) = \rho d\rho, \quad \text{ou} \quad \mathrm{P}m ds = \rho d\rho,$$

ou

$$ds = \frac{\rho d\rho}{\mathrm{P}m} = \frac{\rho d\rho}{p} \text{ [*]}.$$

C. Q. F. T.

---

[*] J'ai démontré cette expression de ds d'une autre manière, dans mon *Mémoire sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince, et les rapports qui ont lieu entre cette attraction et le mouvement de la chaleur.* (Voir le *Journal de l'École Polytechnique,* XXV^e cahier, page 266.)