JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MICHAEL ROBERTS

Théorèmes de géométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 466-468.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__466_0>

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. MICHAEL **ROBERTS**.

(Communication de M. Liouville à l'Académie des Sciences. — *Comptes rendus*, t. XXI, p. 1410.)

« M. Liouville entretient l'Académie de quelques théorèmes qui lui ont été communiqués par un géomètre de Dublin, M. Michael Roberts [*]. Ces théorèmes très-intéressants sont surtout relatifs aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure que l'on peut tracer sur la surface d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. M. Michael Roberts fait voir, par exemple, que les lignes géodésiques qui partent, dans toutes les directions, d'un des ombilics de la surface, vont nécessairement aboutir à l'ombilic opposé, où elles arrivent avec des longueurs égales. Il prouve aussi que les lignes de courbure, considérées par rapport à deux ombilics intérieurs, pris pour foyers, offrent la plus grande analogie avec l'ellipse ordinaire, et pourraient être décrites, comme elle, au moyen d'un fil attaché par ses extrémités à ces points fixes. En effet, la somme des deux arcs géodésiques menés des foyers à un point reste constante quand le point se meut sur la ligne de courbure à laquelle il appartient. On trouve la même analogie avec l'hyperbole en prenant pour foyers un ombilic intérieur et un ombilic extérieur.

M. Michael Roberts démontre ces théorèmes d'une manière très-simple en partant de l'équation différentielle des lignes géodésiques, mise sous la forme

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \beta,$$

que M. Liouville lui a donnée dans le *Journal de Mathématiques* (tome IX, page 401). Les démonstrations de l'auteur reposent, d'une part, sur ce que β a la même valeur pour toute ligne géodésique passant par un ombilic quelconque; d'autre part, sur ce que, pour une

[*] Le Mémoire de M. Michael Roberts paraîtra dans un prochain cahier.

valeur donnée de β, et en un point (μ, ν), on n'a pour tang² i qu'une seule valeur, en sorte que deux lignes géodésiques qui répondent à une même valeur de β, ne peuvent se rencontrer sur une ligne de courbure sans faire avec elle, d'un côté ou d'un autre, des angles égaux. Ces lemmes qu'on établit immédiatement étant admis, soit MM' une ligne de courbure, et menons des quatre ombilics au point M les arcs géodésiques AM, BM, CM, DM. La valeur de β restant la même pour ces arcs, ils devront tous faire de divers côtés le même angle avec MM'; donc ils seront deux à deux le prolongement l'un de l'autre, et si A et C sont deux ombilics opposés, la ligne géodésique AM se continuera par MC jusqu'au point C. De plus, quand on passe du point M à un point infiniment voisin M', AM augmente ou diminue, d'après un théorème de M. Gauss, de la projection de MM' sur AM; à cause de l'égalité des angles en M, CM diminue ou augmente de la même quantité. La somme ou l'arc total AMC conserve donc la même valeur, quelle que soit la direction primitive en A. On arrive de la même manière aux égalités

$$\mathrm{AM} + \mathrm{BM} = \text{constante}, \quad \mathrm{AM} - \mathrm{DM} = \text{constante}.$$

La longueur constante de AMC est évidemment celle du demi-périmètre de l'ellipse, qui sur la surface et dans un plan perpendiculaire à l'axe moyen passe par les quatre ombilics; mais il faut remarquer que les arcs indéfinis AM, partant d'un ombilic, s'expriment aussi par des arcs d'ellipses, quoique en général l'expression d'un arc géodésique dépende des transcendantes abéliennes.

» D'autres propositions se déduisent de ce que β conserve une même valeur pour toutes les lignes géodésiques qui sont tangentes à une même ligne de courbure. On conclut aisément de là que si deux lignes géodésiques sont tangentes à deux lignes de courbure données, et se coupent à angle droit, le lieu de leur intersection aura tous ses points à égale distance du centre de l'ellipsoïde, et sera une sphéro-conique; la condition de toucher une ligne géodésique donnée pourrait être remplacée par celle de partir d'un ombilic. Nous ajouterons encore ce théorème que M. Roberts ne paraît pas avoir aperçu, mais qu'on déduit aisément de ce qui précède, comme l'a remarqué M. Chasles : Si deux lignes géodésiques sont menées d'un quelconque des points d'une ligne de courbure tangentiellement à une autre ligne de courbure de même espèce, la somme de ces deux lignes géodésiques aura avec l'arc intercepté sur la seconde ligne de courbure une différence constante. Cette propriété est analogue à celle des ellipses planes homofocales. L'analogie des lignes de courbure de l'ellipsoïde avec les systèmes de coniques planes homofocales se manifeste au reste sous différents points de vue; c'est ce qu'on peut voir en particulier par le théorème suivant que cite M. Roberts, et qui est dû à M. Mac-Cullagh: Les lignes de courbure de l'ellipsoïde se projettent sur les plans des sections circulaires, par des droites parallèles à l'axe minimum de la surface, en coniques homofocales ayant pour foyers les projections des ombilics. Relativement aux sphéro-coniques dont on a parlé tout à l'heure, et dont l'équation sur la surface de l'ellipsoïde est de la forme

$$\mu^2 + \nu^2 = \text{constante},$$

M. Mac-Cullagh trouve qu'elles se projettent en cercles concentriques.

» En terminant l'analyse des beaux résultats obtenus par M. Michael Roberts, M. Liouville fait observer que l'équation

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \beta,$$

dont cet habile géomètre s'est servi, revient à une autre équation

$$\mathrm{PD} = \text{constante},$$

que l'on doit à M. Joachimsthal et qui se prête aussi très-bien aux considérations géométriques; enfin, il rappelle que c'est M. Jacobi qui a ici ouvert la route et vaincu le premier les grandes difficultés du sujet par une découverte capitale, en intégrant l'équation des lignes géodésiques sur un ellipsoïde quelconque. »