JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur un mémoire de M. Serret, relatif à la représentation des fonctions elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 456-465.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__456_0>

Sur un Mémoire de M. SERRET, *relatif à la représentation des fonctions elliptiques;*

PAR J. LIOUVILLE.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* tome XXI, page 1255.)

« **1.** J'ai eu l'honneur de faire, il y a quelque temps, au nom d'une Commission composée de M. Lamé et de moi, un Rapport sur un Mémoire de M. Serret, relatif à la représentation géométrique des fonctions elliptiques. Ce Mémoire, dont l'Académie a ordonné l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers,* contient, entre autres résultats remarquables, la découverte de diverses classes de courbes algébriques dont les arcs représentent identiquement les valeurs de certaines fonctions elliptiques de première espèce. Les modules des fonctions elliptiques dont il s'agit ont pour carrés les racines ζ d'équations du premier, du second,..., du $m^{ième}$ degré à volonté, équations où entre un paramètre indéterminé n et dont voici le mode général de formation.

» Soient

$$\varphi(z) = \frac{(z-a)^m (z+a)^n}{(z+\alpha)^{n+1}}, \qquad \psi(z) = \frac{(z+a)^n (z-a)^m}{(z-\alpha)^{m+1}},$$

m et n désignant des nombres entiers positifs. Formez les dérivées $\varphi^m(z)$, $\psi^n(z)$ de l'ordre m et de l'ordre n respectivement. Elles donneront lieu à l'identité suivante

$$\frac{\varphi^m(\alpha)}{1.2\ldots m} + \frac{\psi^n(-\alpha)}{1.2\ldots n} = 0,$$

qui est très-facile à démontrer. Ainsi les équations

$$\varphi^m(\alpha) = 0, \quad \psi^n(-\alpha) = 0$$

n'établissent entre a et α qu'une seule relation. De plus, si l'on fait

$$\zeta = \frac{(a+\alpha)^2}{4a\alpha},$$

on trouve que $\varphi^m(\alpha)$ peut se mettre sous la forme

$$\text{(A)} \qquad \varphi^m(\alpha) = 2^{m-n-1}\frac{(a+\alpha)^{n-m}a^m}{\alpha^{n+1}}\Pi_m(\zeta),$$

$\Pi_m(\zeta)$ désignant un polynôme en ζ, du degré m. Et c'est l'équation

$$\Pi_m(\zeta) = 0$$

qui fournira les racines ζ dont nous avons parlé tout à l'heure.

» M. Serret, dans son premier travail, s'était contenté d'écrire la valeur de Π_m sous la forme d'une double somme très-compliquée; mais de nouvelles recherches l'ont conduit depuis à un résultat d'une simplicité inespérée. Il a trouvé

$$\text{(B)} \qquad \Pi_m(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{n-m}}\frac{d^m.\zeta^n(\zeta-1)^m}{d\zeta^m}.$$

En particulier, pour $m=n$, et en posant $\zeta = \frac{x+1}{2}$, on a donc

$$\Pi_n = \frac{1}{2^n}\frac{d^n.(x^2-1)^n}{dx^n},$$

en sorte que les fonctions Π_n, divisées par $1.2\ldots n$, coïncident avec les fonctions X_n de Legendre, qui se présentent dans le développement de $(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$.

» L'auteur a démontré la proposition précédente dans un Mémoire qu'il vient de publier et dont il m'a chargé d'offrir en son nom un exemplaire à l'Académie. La méthode dont il a fait usage conduit d'abord à une relation linéaire entre trois fonctions Π_m, Π_{m+1}, Π_{m+2}, puis à l'expression générale indiquée ci-dessus, et enfin à une équation différentielle du second ordre, à laquelle chaque fonction Π_m satisfait. Les géomètres en apprécieront toute l'utilité d'après les résultats importants qu'elle a fournis; toutefois, ils trouveront peut-être qu'elle exige des calculs un peu longs. Je me propose d'arriver ici directement, et par un moyen facile, à l'expression de $\varphi^m(\alpha)$ ou de $\psi^n(-\alpha)$, dont on a besoin.

» Mais, auparavant, observons qu'on peut donner à l'expression de $\Pi_m(\zeta)$ plus d'élégance encore en s'appuyant sur l'identité

$$(C)\qquad \frac{\zeta^n}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n}=\frac{\zeta^m}{\Gamma(m+1)}\frac{d^m.\zeta^n(\zeta-1)^m}{d\zeta^m},$$

qui se démontre elle-même de suite en développant les puissances de $\zeta-1$, effectuant les différentiations et comparant dans les deux membres les coefficients des termes où ζ est affecté du même exposant.

» D'après les équations (B) et (C), il vient

$$(D)\qquad \Pi_m(\zeta)=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n},$$

de sorte qu'en mettant de côté le facteur numérique, les fonctions Π_m se confondent avec les simples différentielles

$$\frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n}.$$

C'est à la formule (D) que j'arriverai en formant, comme on va le voir, la valeur de $\varphi^m(\alpha)$.

» 2. Démontrons d'abord un lemme qui sert de base au nouveau procédé.

» La formule de Lagrange, appliquée à l'équation

$$y=\zeta+t\mathrm{F}(y),$$

où ζ et t sont des variables dont la seconde est supposée assez petite pour la convergence de la série, nous donne

$$f(y)=\sum\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\frac{d^{n-1}.f'(\zeta)\mathrm{F}(\zeta)^n}{d\zeta^{n-1}},$$

et, par suite,

$$f'(y)\frac{dy}{d\zeta}=\sum\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n.f'(\zeta)\mathrm{F}(\zeta)^n}{d\zeta^n}.$$

Maintenant, soient

$$f'(y)=y^m \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(y)=y-1,$$

ce qui donne

$$y = \frac{\zeta - t}{1 - t}, \qquad \frac{dy}{d\zeta} = \frac{1}{1 - t};$$

il viendra

$$\text{(E)} \qquad \frac{(\zeta - t)^m}{(1 - t)^{m+1}} = \sum \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^n . \zeta^m (\zeta - 1)^n}{d\zeta^n}.$$

» L'examen de diverses fonctions dans le développement desquelles figurent des quantités de la forme

$$\frac{d^n . \zeta^m (\zeta - 1)^n}{d\zeta^n},$$

m'avait conduit à la formule (E). Voici comment j'en ai déduit ensuite la valeur de $\varphi^m(\alpha)$.

» 5. Puisque l'on a

$$\varphi(z) = \frac{(z - a)^m (z + a)^n}{(z + \alpha)^{n+1}},$$

la dérivée $\varphi^m(z)$ coïncide avec le coefficient de $u^m v^n$ dans le développement de

$$\frac{d^m}{dz^m} \frac{1}{[z + \alpha - (z + a)v][1 - (z - a)u]},$$

suivant les puissances croissantes des deux indéterminées u et v. Or, la fraction qu'on doit à présent différentier, considérée comme fonction de z, se décompose en deux fractions simples

$$\frac{A}{\alpha - av + (1 - v)z} + \frac{B}{1 + au - uz},$$

où

$$A = \frac{1 - v}{1 - v + (a + \alpha - 2av)u}, \qquad B = \frac{u}{1 - v + (a + \alpha - 2av)u};$$

et, par suite, la dérivée de l'ordre m, divisée par $1.2.3\ldots m$, est égale à

$$\frac{(-1)^m A (1 - v)^m}{[\alpha - av + (1 - v)z]^{m+1}} + \frac{Bu^m}{(1 + au - uz)^{m+1}}.$$

Comme nous n'avons besoin que du coefficient de $u^m v^n$ dans le développement, nous pouvons supprimer le second terme qui contient partout le facteur u^{m+1}, puisque B contient le facteur u. En faisant $z = \alpha$, on voit donc que

$$\frac{\varphi^m(\alpha)}{1.2\ldots m}$$

a pour valeur le coefficient de $u^m v^n$ dans le développement de

$$\frac{(-1)^m (1-v)^{m+1}}{[1 - v + (a + \alpha - 2av)u][2\alpha - (a+\alpha)v]^{m+1}},$$

c'est-à-dire le coefficient de v^n dans le développement de

$$\frac{(a + \alpha - 2av)^m}{[2\alpha - (a+\alpha)v]^{m+1}}.$$

Mais, en posant

$$v = \frac{2\alpha t}{a+\alpha}, \qquad \zeta = \frac{(a-\alpha)^2}{4a\alpha},$$

cette dernière quantité devient

$$\frac{2^{m-1}a^m}{\alpha(a+\alpha)^m}\,\frac{(\zeta - t)^m}{(1-t)^{m+1}}.$$

En vertu de la formule (E), le coefficient t^n, dans le développement, sera donc

$$\frac{2^{m-1}a^m}{\alpha(a+\alpha)^m}\,\frac{1}{\Gamma(n+1)}\,\frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n};$$

si l'on rétablit la variable v au lieu de t, il faudra multiplier par

$$\frac{(a+\alpha)^n}{2^n \alpha^n}$$

pour avoir le coefficient de v^n. On obtient ainsi finalement

$$\frac{\varphi^m(\alpha)}{1.2\ldots m} = 2^{m-n-1}\,\frac{(a+\alpha)^{n-m}a^m}{\alpha^{n+1}}\,\frac{1}{\Gamma(n+1)}\,\frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n}.$$

En permutant m et n, et changeant les signes de a et α, cette formule en donne une autre, savoir,

$$\frac{\psi^n(-\alpha)}{1.2\ldots n} = -\,2^{n-m-1}\,\frac{(a+\alpha)^{m-n}a^n}{\alpha^{m+1}}\,\frac{1}{\Gamma(m+1)}\,\frac{d^m.\zeta^n(\zeta-1)^m}{d\zeta^m}.$$

Nous savons d'avance que la somme des deux résultats doit être nulle, et c'est ce qu'on peut du reste vérifier à l'aide de l'équation identique (C). Réciproquement, si l'identité (C) n'était pas déjà démontrée, nous y arriverions comme à une conséquence nécessaire de l'équation

$$\frac{\varphi^m(\alpha)}{1.2\ldots m} + \frac{\psi^n(-\alpha)}{1.2\ldots n} = 0.$$

» L'expression de $\varphi^m(\alpha)$, savoir,

$$\varphi^m(\alpha) = 2^{m-n-1}\frac{(a+\alpha)^{n-m}a^m}{\alpha^{n+1}}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n},$$

qu'on déduit de notre analyse, étant comparée à celle que donne la formule (A), on en conclut

$$\Pi_m(\zeta) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n},$$

comme nous l'avions annoncé.

» **4.** Ainsi, l'équation

$$\Pi_m(\zeta) = 0$$

peut s'écrire

$$\frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n} = 0.$$

» Appliquons n fois de suite le théorème de Rolle à l'équation

$$F(\zeta) = \zeta^m(\zeta-1)^n = 0,$$

qui a m racines égales à 0 et n racines égales à 1; l'équation dérivée $F'(\zeta) = 0$ en aura donc $(m-1)$ égales à 0, $(n-1)$ égales à 1, et une ζ_1 comprise entre 0 et 1; $F''(\zeta) = 0$ en aura $(m-2)$ égales à 0, $(n-2)$ égales à 1, et deux ζ'_1, ζ'_2, comprises entre 0 et ζ_1 d'une part, ζ_1 et 1 de l'autre. En continuant ainsi jusqu'à la dérivée de l'ordre n, et dans l'hypothèse de n au moins égal à m, on verra que les m racines de l'équation

$$\frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n} = 0$$

sont réelles, inégales, et comprises entre 0 et 1; théorème d'une haute importance dans la question où cette équation se présente, et dont il était bon de rappeler la démonstration déjà donnée par M. Serret. La même méthode appliquée au cas de $m > n$ prouverait qu'alors l'équation a $m - n$ racines nulles et seulement n racines distinctes comprises entre o et 1.

» 5. Chaque fonction $\Pi_m(\zeta)$ satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. Soit, en effet,

$$X = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)}\zeta^m(\zeta - 1)^n, \quad \text{d'où} \quad \Pi_m = \frac{d^n X}{d\zeta^n}.$$

En prenant la différentielle à indice $(n+1)$ de l'équation, facile à vérifier,

$$(\zeta^2 - \zeta)\frac{dX}{d\zeta} + [m - (m+n)\zeta]X = 0,$$

on aura donc

$$(\zeta^2 - \zeta)\frac{d^2\Pi_m}{d\zeta^2} + [(n-m+2)\zeta + m - n - 1]\frac{d\Pi_m}{d\zeta} - m(n+1)\Pi_m = 0,$$

comme M. Serret l'a trouvé.

» En général, les fonctions Π dépendent de la variable ζ et des indices m, n, qu'il conviendrait de mettre tous les deux en évidence, en écrivant

$$\Pi_m^n(\zeta) \quad \text{ou} \quad \Pi_m^n,$$

expression qui, d'après ce que nous avons vu, représenterait indifféremment l'une ou l'autre des quantités équivalentes

$$\frac{1}{\zeta^{n-m}}\,\frac{d^m.\zeta^n(\zeta-1)^m}{d\zeta^m}, \quad \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)}\,\frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n}.$$

» On déduit immédiatement de là cette formule

$$(\mathrm{F}) \qquad \Pi_n^m = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)}\zeta^{n-m}\,\Pi_m^n,$$

qui permet de permuter entre eux les indices inférieur et supérieur.

» On peut introduire les fonctions Π_m^n dans le second membre de la formule (E), qui devient alors

$$(G) \qquad \frac{(\zeta - t)^m}{(1-t)^{m+1}} = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \sum t^n \Pi_m^n,$$

le signe $\sum$ se rapportant toujours à n.

» En différentiant les deux membres par rapport à ζ, et multipliant ensuite par $\zeta - t$, on trouve aisément

$$m \sum t^n \Pi_m^n = (\zeta - t) \sum t^n \frac{d\Pi_m^n}{d\zeta};$$

il en résulte, par la comparaison des puissances semblables de t,

$$m\Pi_m^n = \zeta \frac{d\Pi_m^n}{d\zeta} - \frac{d\Pi_m^{n-1}}{d\zeta}.$$

» En différentiant, au contraire, l'équation (G) par rapport à t, et multipliant ensuite par $(\zeta - t)(1 - t)$, on verra que les deux quantités

$$[\zeta - (1+\zeta)t + t^2] \sum nt^{n-1} \Pi_m^n$$

et

$$[(m+1)\zeta - m - t] \sum t^n \Pi_m^n$$

sont égales entre elles. De là, entre trois fonctions consécutives

$$\Pi_m^{n+2}, \quad \Pi_m^{n+1}, \quad \Pi_m^n,$$

la relation linéaire

$$(n+2)\zeta \Pi_m^{n+2} = [(m+n+2)\zeta + n - m + 1] \Pi_m^{n+1} - (n+1) \Pi_m^n.$$

En changeant m en n et n en m, il s'ensuit

$$(m+2)\zeta \Pi_n^{m+2} = [(m+n+2)\zeta + m - n + 1] \Pi_n^{m+1} - (m+1) \Pi_n^m.$$

Si donc on permute, à l'aide de la formule (F), les indices inférieurs et supérieurs, on en conclura

$$\Pi_{m+2}^n = [(n+m+2)\zeta - (n-m-1)] \Pi_{m+1}^n - (m+1)^2 \zeta \Pi_m^n.$$

C'est cette dernière relation que M. Serret a d'abord obtenue, et c'est par elle qu'il a été conduit à l'expression simple des fonctions Π.

» Que l'on change m en $m+1$ dans la formule (G), et l'on en tirera encore immédiatement

$$(1-t)\sum t^n \Pi^n_{m+1} = (m+1)(\zeta - t)\sum t^n \Pi^n_m;$$

donc

$$\Pi^{n+1}_{m+1} - \Pi^n_{m+1} = (m+1)\left(\zeta\, \Pi^{n+1}_m - \Pi^n_m\right).$$

» En général, les divers développements où les fonctions Π entrent comme coefficients mènent à de nombreuses propriétés de ces fonctions; mais nous n'avons pas l'intention, pour le moment, de suivre ces recherches.

» **6**. Terminons en donnant de la formule (E), qui nous a été si utile, une démonstration nouvelle, plus élémentaire en ce sens qu'on n'y fait point usage de la série de Lagrange, et qui repose d'ailleurs sur des considérations toutes semblables à celles dont nous nous sommes servis pour trouver $\varphi^m(z)$.

» La dérivée

$$\frac{d^m.\zeta^n(\zeta-1)^m}{d\zeta^m}$$

est précisément le coefficient de $u^m v^n$ dans le développement de

$$\frac{d^m}{d\zeta^m}\,\frac{1}{(1-v\zeta)[1-(\zeta-1)u]}$$

suivant les puissances croissantes de u et v. Or, la fraction qu'on doit à présent différentier, considérée comme fonction de ζ, se décompose en deux fractions simples

$$\frac{A}{1-v\zeta} + \frac{B}{1+u-u\zeta},$$

où

$$A = \frac{v}{v-(1-v)u}, \qquad B = -\frac{u}{v-(1-v)u};$$

de là, pour la dérivée de l'ordre m, divisée par $1.2\ldots m$, cette valeur

$$\frac{Av^m}{(1-v\zeta)^{m+1}} + \frac{Bu^m}{(1+u-u\zeta)^{m+1}}.$$

Comme nous n'avons besoin que du coefficient de $u^m v^n$, nous pouvons supprimer le second terme qui contient partout le facteur u^{m+1}, puisque B contient le facteur u. Reste le premier terme, savoir,

$$\frac{v^{m+1}}{[v-(1-v)u](1-v\zeta)^{m+1}},$$

dans le développement duquel on doit chercher le coefficient de $u^m v^n$; cela revient à chercher le coefficient de v^n dans le développement de

$$\frac{(1-v)^m}{(1-v\zeta)^{m+1}}.$$

Nous sommes donc assurés que

$$\frac{1}{1.2\ldots m}\frac{d^m.\zeta^n(\zeta-1)^m}{d\zeta^m}$$

exprime le coefficient de v^n dans ce dernier développement. Posons $v=\frac{t}{\zeta}$, et multiplions tout par ζ^m; il s'ensuivra que le coefficient de t^n dans le développement de

$$\frac{(\zeta-t)^m}{(1-t)^{m+1}}$$

est

$$\frac{1}{\Gamma(m+1)}\frac{1}{\zeta^{n-m}}\frac{d^m.\zeta^n(\zeta-1)^m}{d\zeta^m},$$

c'est-à-dire, eu égard à l'identité (C),

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{d^n.\zeta^m(\zeta-1)^n}{d\zeta^n}.$$

La formule (E) est donc démontrée. »