JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Note sur une intégrale définie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 453-455.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__453_0>

NOTE

SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Considérons une ellipse sphérique, dont les demi-axes sont les arcs λ et θ, et dont l'équation polaire est, par conséquent,

$$\frac{1}{\sin^2 \rho} = \frac{\cos^2 \omega}{\sin^2 \theta} + \frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 \lambda}:$$

l'aire sectorielle indéfinie aura pour sa valeur, par la formule connue, l'intégrale

$$2\int \sin^2 \tfrac{1}{2}\rho d\omega, \quad \text{ou} \quad \omega - \int d\omega \sqrt{\left(\frac{\tang^2\lambda \cos^2\omega + \tang^2\theta \sin^2\omega}{\tang^2\lambda \sec^2\theta \cos^2\omega + \tang^2\theta \sec^2\lambda \sin^2\omega}\right)}.$$

Supposons $\lambda < \theta$, et faisons

$$\tang \omega = \sqrt{1 - h^2} \tang \varphi, \quad \text{où} \quad h = \sqrt{\left(1 - \frac{\tang^2\lambda}{\tang^2\theta}\right)};$$

si l'on intègre depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura pour la quatrième partie (A) de l'aire sphérique, limitée par le périmètre de l'ellipse sphérique, l'expression

$$A = \tfrac{1}{2}\pi - \sqrt{1 - h^2} \cos\theta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1 - h^2 \sin^2\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - h^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi}},$$

ou, d'après la notation des fonctions elliptiques,

$$A = \tfrac{1}{2}\pi - \sqrt{1 - h^2} \cos\theta\, \Pi(-h^2, h \sin\theta) \text{ [*]}.$$

[*] On peut déduire cette expression de la formule donnée par M. Catalan, dans ce

Cela posé, si l'on différentie cette expression par rapport à ϑ, en supposant h constant, on trouvera

$$\frac{dA}{d\vartheta}d\vartheta = \sqrt{1-h^2}\sin\theta\left[\Pi(-h^2, h\sin\theta) - h^2\cos^2\vartheta\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi}{1-h^2\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{(1-h^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right]d\vartheta.$$

On a, d'ailleurs,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi}{1-h^2\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{(1-h^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{h^2\cos^2\theta}\left[\Pi(-h^2, h\sin\theta) - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{(1-h^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right],$$

et

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{(1-h^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-h^2\sin^2\vartheta}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\varphi\sqrt{(1-h^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)} = \frac{E(h\sin\vartheta)}{1-h^2\sin^2\vartheta},$$

en sorte que

$$\frac{dA}{d\vartheta}d\vartheta = \sqrt{1-h^2}\,\frac{E(h\sin\theta)}{1-h^2\sin^2\theta}\sin\theta\,d\vartheta.$$

Cette différentielle a pour valeur géométrique la quatrième partie de la couronne elliptico-sphérique comprise entre deux cônes du second degré consécutifs, qui ont pour sommet commun le centre de la sphère, et dont le rapport des tangentes trigonométriques des demi-angles principaux est constant. Par conséquent, si l'on intègre depuis $\vartheta = 0$ jusqu'à $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, il est aisé de voir qu'on aura une expression pour la huitième partie de la surface sphérique totale; donc

$$\sqrt{1-h^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{E(h\sin\vartheta)}{1-h^2\sin^2\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{\pi}{2},$$

et si l'on pose

$$h\sin\vartheta = k,$$

on transformera cette intégrale dans la suivante :

$$\int_0^h\frac{E(k)\,k\,dk}{(1-k^2)\sqrt{h^2-k^2}} = \frac{\pi h}{2\sqrt{1-h^2}}.$$

Journal, tome VI, page 340, pour la portion de la surface sphérique interceptée par un cône du second ordre, dont le sommet est au centre de la sphère. Il faut substituer pour a et b, dans la notation de ce savant, tang θ et tang λ, et pour α et β, cosec ϑ et cosec λ.

On peut vérifier ce résultat par des considérations très-simples : en effet, on a

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \ldots\right],$$

et, en divisant cette série par $1 - k^2$, on trouve

$$\frac{E(k)}{1-k^2} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 3k^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\right)^2 5k^4 + \left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\right)^2 7k^6 + \ldots\right];$$

comme on le verra facilement en multipliant cette dernière série par la quantité $1 - k^2$. Donc, en se rappelant que

$$\int_0^h \frac{k^{2n+1}\,dk}{\sqrt{h^2-k^2}} = \frac{2.4\ldots 2n-2.2n}{3.5\ldots 2n-1.2n+1}\,h^{2n+1},$$

on déduit

$$\int_0^h \frac{E(k)\,k\,dk}{(1-k^2)\sqrt{h^2-k^2}} = \frac{\pi h}{2}\left[1 + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}h^4 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}h^6 + \ldots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\,h\,(1-h^2)^{-\frac{1}{2}}.$$