JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Extrait d'une lettre de M. William Roberts à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 451-452.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__451_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. WILLIAM ROBERTS A M. LIOUVILLE.

« Dublin, 24 octobre 1845.

» ... Je viens de lire dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXI, page 201, une communication de M. Chasles, relative aux arcs de la lemniscate de Bernoulli, et où se trouve une génération de cette courbe dans le cercle.

» Je transcris :

» *Qu'autour d'un point pris au dehors d'un cercle, à une distance du centre égale au rayon multiplié par* $\sqrt{2}$, *on fasse tourner une droite, et qu'on porte sur cette droite, à partir du point, un segment égal à la corde qu'elle détermine dans le cercle, ce segment sera le rayon vecteur d'une lemniscate.*

» La lecture de cette proposition m'a suggéré les remarques suivantes :

» **1.** Si le point fixe est choisi arbitrairement, la construction ci-dessus donnera le lieu des projections orthogonales du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole quelconque sur les tangentes à cette courbe.

» **2.** Si par un point pris sur la surface d'une sphère on fait passer des arcs de grands cercles qui coupent un petit cercle décrit sur la sphère avec le *rayon sphérique* α, et si, à partir du point fixe, on porte sur ces grands cercles des arcs égaux aux *cordes sphériques* correspondantes du petit cercle, les extrémités de ces arcs donneront une courbe représentée par l'équation polaire

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\rho = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\delta \sin^2\omega}{\cos^2\alpha};$$

δ est l'arc de grand cercle compris entre le point fixe et le pôle du petit cercle.

» J'ai fait voir, dans votre Journal, que cette équation est celle d'une courbe obtenue en coupant une sphère par un cône du second ordre, dont le sommet est en un point de la surface sphérique, et dont l'un des axes principaux passe par le centre de cette surface; c'est aussi l'équation du lieu des extrémités des arcs de grands cercles abaissés perpendiculairement du centre d'une conique sphérique sur les grands cercles tangents à cette conique.

» **3.** Deux variétés de cette courbe présentent, comme je l'ai précédemment montré, des analogies remarquables avec la lemniscate ordinaire, de même que les coniques sphériques dont elle dérive ont avec l'hyperbole équilatère de grandes analogies. On obtient ces deux variétés en établissant entre α et δ les relations

$$\sin\delta = \sqrt{2}.\sin\alpha, \tag{1}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{2}.\sin\tfrac{1}{2}\delta. \tag{2}$$

» Quoique les résultats que je viens de vous indiquer n'aient pas par eux-mêmes un grand intérêt, je crois qu'ils valent la peine d'être mentionnés : ils confirment l'analogie entre une classe remarquable de courbes planes et une classe de courbes sphériques qui n'a pas, que je sache, été jusqu'ici remarquée, et qui peut servir à la représentation des fonctions elliptiques. »