JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. EISENSTEIN

Remarques sur les transcendantes elliptiques et abéliennes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 445-450.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__445_0>

REMARQUES

SUR LES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES ET ABÉLIENNES;

PAR M. G. EISENSTEIN,

Étudiant à Berlin.

Extrait du Journal de M. Crelle, tome XXVII. — Traduction de M. FAYE.

§ Ier.

Le produit infini

$$(1)\qquad \Pi\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)=\begin{cases}P(0,x),\\ P(1,x),\end{cases}$$

qui représente deux expressions suivant qu'on attribue à l'indice λ toutes les valeurs paires ou toutes les valeurs impaires, et dans lequel nous supposons que le facteur $1+\frac{x}{0}$ soit remplacé par x, donne, pour chaque valeur réelle ou imaginaire de x, une valeur toute déterminée de la forme $p+q\sqrt{-1}$, qui peut facilement être représentée par des fonctions exponentielles, ou bien, ce qui est au fond la même chose, par des fonctions circulaires; et réciproquement, les deux produits infinis dont il est ici question, donnent une définition complète des fonctions simplement périodiques.

Les transcendantes elliptiques, cette remarquable espèce de fonctions, qui ont tant occupé les géomètres dans ces derniers temps, ne sont pas autre chose que des combinaisons, par voie de *division*, des quatre doubles produits infinis qui se déduisent du produit

$$(2)\qquad \Pi\left(1-\frac{x}{\lambda+\lambda' A}\right),$$

quand on suppose que A désigne une constante donnée, et que l'on étend le signe de la multiplication Π à toutes les valeurs paires ou impaires de λ ainsi qu'à toutes les valeurs paires ou impaires de λ'. Pour considérer ces quatre produits, désignons-les par les expressions

$$(3)\qquad P(0,0,x),\quad P(1,0,x),\quad P(0,1,x),\quad P(1,1,x),$$

dans chacune desquelles 0 doit répondre à un nombre pair, et 1 à un nombre impair; alors les trois fonctions elliptiques qui se présentent ordinairement sont données par les trois quotients suivants :

$$(4)\qquad \frac{P(0,0,x)}{P(0,1,x)},\quad \frac{P(1,0,x)}{P(0,1,x)},\quad \frac{P(1,1,x)}{P(0,1,x)},$$

et ces quotients possèdent la propriété remarquable d'être doublement périodiques.

La constante A ne saurait jamais avoir une valeur réelle; car pour une valeur réelle et irrationnelle de A, on pourrait trouver pour les nombres entiers λ et λ', une infinité de valeurs telles que l'expression $\lambda + \lambda' A$ devînt moindre qu'un nombre arbitraire quelque petit qu'il fût; pour une valeur rationnelle de A, on pourrait trouver un nombre auquel cette expression deviendrait égale pour une infinité de valeurs de λ et de λ'. En sorte que, dans les deux cas, le produit infini ne saurait être convergent. On suppose d'ordinaire que A est purement imaginaire, c'est-à-dire de la forme $q\sqrt{-1}$, q étant réel; mais on pourrait donner à A une forme complexe quelconque sans que le double produit (2) cesse d'acquérir une valeur très-déterminée pour chaque valeur de x.

Cette définition que nous venons de donner des transcendantes elliptiques, et qui est plus générale que la définition ordinaire, conduit d'une manière fort simple à toutes les propriétés de ces fonctions. Je vais ici donner en peu de mots une idée de la voie qu'on pourrait suivre pour y parvenir.

D'abord on peut, en effectuant la multiplication d'après l'un des deux indices et en employant les formules connues pour les fonctions circulaires, transformer de deux manières les doubles produits infinis en des produits infinis simples, et l'on obtient le développement connu des fonctions elliptiques en produits infinis (*Evolutio prima*; JACOBI, *Fundamenta nova*, page 86). Mais, en considérant de plus près les résultats ainsi obtenus, on voit qu'ils consistent en deux fonctions nouvelles

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(z) &= \left(z + \varepsilon\frac{1}{z}\right)(1+\varepsilon q^2 z^2)\left(1+\varepsilon q^2\frac{1}{z^2}\right)(1+\varepsilon q^4 z^2)\left(1+\varepsilon q^4\frac{1}{z^2}\right) \text{ à l'infini},\\ \psi(z) &= (1+\varepsilon q z^2)\left(1+\varepsilon q\frac{1}{z^2}\right)(1+\varepsilon q^3 z^2)\left(1+\varepsilon q^3\frac{1}{z^2}\right) \text{ à l'infini}, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles z désigne une variable nouvelle, fonction exponentielle de x, q une constante dépendante de A, et où $\varepsilon = \pm 1$.

On peut se convaincre, par une simple substitution des valeurs, que les deux fonctions φ et ψ satisfont aux équations

$$(6)\qquad \varphi(z) = \varepsilon q z^2 \varphi(qz),\qquad \psi(z) = \varepsilon q z^2 \psi(qz),$$

à l'aide desquelles le développement en série s'obtient immédiatement.

Posons

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} K_{2n+1} z^{2n+1},\qquad \psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} L_{2n} z^{2n};$$

nous obtiendrons à l'aide des équations (6) les équations suivantes entre les coefficients :

$$K_{2n+3} = \varepsilon q^{2n+2} K_{2n+1}, \qquad L_{2n+2} = \varepsilon q^{2n+1} L_{2n},$$

desquelles il suit

$$(7) \qquad \varphi(z) = K_1 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon^n q^{n(n+1)} z^{2n+1}, \qquad \psi(z) = L_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon^n q^{n^2} z^{2n} \text{ [*]}.$$

Il est bien remarquable que chaque puissance de φ et de ψ, chaque fonction homogène quelconque des deux fonctions φ et ψ, peut être développée en une série toute semblable, pourvu qu'elle ne soit pas du 0^e degré. En effet, soit F une fonction homogène du degré k. A l'aide des équations (6), on a

$$F[\varphi(z),\ \psi(z)] = F[\varepsilon q z^2 \varphi(qz),\ \varepsilon q z^2 \psi(qz)],$$

et, par suite des propriétés des fonctions homogènes,

$$F[\varepsilon q z^2 \varphi(qz),\ \varepsilon q z^2 \psi(qz)] = \varepsilon^k q^k z^{2k} F[\varphi(qz),\ \psi(qz)].$$

Si donc on pose

$$F[\varphi(z),\ \psi(z)] = G(z),$$

on a la relation

$$(8) \qquad G(z) = \varepsilon^k q^k z^{2k} G(qz),$$

qui devra être employée comme formule fondamentale pour le développement.

En appliquant d'une manière spéciale le principe qui vient d'être indiqué, on arrive aussi à prouver que les fonctions φ et ψ satisfont à une équation différentielle de la forme

$$(9) \qquad \left(\varphi\frac{d\psi}{dx} - \psi\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = p\varphi^4 + p'\varphi^3\psi + p''\varphi^2\psi^2 + p'''\varphi\psi^3 + p^{\text{IV}}\psi^4,$$

ou bien que le quotient $y = \frac{\varphi}{\psi}$ satisfait à l'équation différentielle

$$(10) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = py^4 + p'y^3 + p''y^2 + p'''y + p^{\text{IV}},$$

où $p, p', p'', \ldots$ sont des constantes qui ne dépendent que de A.

§ II.

La marche que nous venons d'indiquer rapidement peut être recommandee spécialement à ceux qui se laissent effrayer par les considérations très-compliquées du calcul intégral dont on part ordinairement pour arriver aux transcendantes elliptiques. Dans le fait, ces considérations ne paraissent guère propres à établir le point de départ

[*] *Evolutio tertia;* JACOBI, *Fundamenta nova*, page 183.

d'une aussi importante théorie, et ne peuvent réellement servir qu'à tracer la route historique qui a conduit à ces résultats. La définition qu'on donne ordinairement des fonctions elliptiques, définition tout à fait contraire à l'analogie dans les fonctions exponentielles, consiste en ce qu'elles sont les fonctions inverses d'intégrales connues chez lesquelles la fonction placée sous le radical monte au quatrième degré. Mais, comme il est difficile de se représenter une telle intégrale dont la différentielle passe subitement du réel à l'imaginaire, il doit paraître presque impossible à ceux qui étudient de se former une idée nette du retournement de cette intégrale, d'autant plus qu'on ne pourrait avoir recours ici à cette interprétation géométrique qui peut servir du moins pour les fonctions circulaires. La périodicité introduit, en outre, une difficulté particulière. Revenons pour un instant aux fonctions circulaires, pour n'avoir à nous occuper que d'une période simple. Si l'on veut, par exemple, définir le sinus comme une fonction de x donnée par l'équation

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = x,$$

on doit alors admettre, d'après les propriétés connues du sinus, que cette intégrale a une infinité de valeurs différentes pour chaque valeur donnée à y, ce qui est en contradiction avec le sens qu'on attribue ordinairement à une pareille intégrale (par exemple pour $y < 1$). De même, à cause de la double périodicité de sin $am.x$, il faudrait accorder que l'intégrale elliptique

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}} = x$$

acquiert pour chaque valeur de y une infinité de systèmes de valeurs en nombre infini.

Il se présente de plus grandes difficultés encore pour les intégrales abéliennes. Les fonctions inverses de ces intégrales doivent posséder une périodicité triple ou même d'une multiplicité supérieure. Mais, par une voie simple et rationnelle, en s'appuyant sur ce que M. Jacobi a dit de la triple périodicité dans le tome XIII du Journal de M. Crelle (*De Funct. duarum variab. quadr. per.*), on arrivera à se convaincre que, dans cette hypothèse, une intégrale abélienne, avec une limite inférieure tout à fait déterminée, peut recevoir toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, pour une valeur quelconque donnée à la variable. Si l'on nous accorde cela, l'intégrale abélienne cesse aussitôt d'être fonction de sa variable. Et comme c'est là une contradiction dans les termes, il en résulte seulement ou que l'intégrale n'a aucune signification analytique, ou bien que la définition qu'on donne d'une intégrale en général, définition d'où nous avons tiré toutes ces conséquences, n'est pas satisfaisante. Pour obvier à cet inconvénient, quand il s'agit, par exemple, de l'intégrale abélienne du premier ordre, l'illustre auteur des *Fundamenta* introduit à la fois deux intégrales, en posant

$$(1) \qquad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \varphi(x), \qquad \int_0^x \frac{xdx}{\sqrt{X}} = \varphi_1(x),$$

dans lesquelles X est une fonction entière de x du cinquième ou du sixième degré, et il considère alors x et y comme fonctions des expressions

$$(2)\qquad u = \varphi x + \varphi(y), \qquad v = \varphi_1 x + \varphi_1(y),$$

de telle sorte qu'on ait

$$(3)\qquad x = \lambda(u, v), \qquad y = \lambda_1(u, v).$$

Mais si nous accordons que la fonction $\varphi(x)$ peut avoir toutes les valeurs possibles pour chaque valeur de x, alors il en sera de même de $\varphi(y)$ pour chaque valeur de y ; ainsi donc, à fortiori, la somme u pourra avoir toutes les valeurs possibles pour chaque valeur donnée de x et de y. On en peut dire autant de v; on ne voit donc pas bien nettement de cette manière comment il pourrait être question ensuite d'une dépendance quelconque entre u, v, x et y. On ne s'affranchirait de cette objection que si l'on disait : à chacune de ces valeurs en nombre infini de u ne correspond qu'une valeur pour v; mais il faudrait d'abord montrer ce que l'on doit entendre, à proprement parler, par *une telle association* de valeurs (par des valeurs ainsi combinées). En tous cas, il est aussi intéressant qu'indispensable de répandre une clarté parfaite sur les principes d'une matière si importante.

§ III.

L'analogie qu'on poursuit d'ordinaire quand on cherche à passer des grandeurs exponentielles et des transcendantes elliptiques à de nouvelles fonctions, consiste dans la forme des intégrales, ou, si l'on veut, dans la *forme des équations différentielles* auxquelles ces fonctions satisfont. Nous allons maintenant chercher une autre espèce d'analogie en recourant aux considérations exposées dans le § Ier. Par suite de la remarque qui y est faite sur les produits infinis simples et doubles relativement aux fonctions circulaires et elliptiques, nous devons considérer comme un analogue de degré supérieur, les *quotients des quotients des produits triples* infinis de la forme

$$\Pi\left(1 - \frac{x}{\lambda + \lambda' A + \lambda'' A'}\right),$$

où A et A′ sont des constantes et où λ, λ' et λ'' représentent des indices avec le sens qu'on y attache ordinairement.

Pour généraliser, désignons par

$$(1)\qquad \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \ldots, \quad \lambda_n$$

n indices, et par

$$(2)\qquad A_2, \quad A_3, \ldots, \quad A_n$$

$n - 1$ constantes. Posons encore, pour abréger,

$$(3)\qquad \lambda_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \ldots + \lambda_n A_n = N,$$

et, dans ces suppositions, considérons le produit

$$(4)\qquad \Pi\left(1-\frac{x}{N}\right),$$

dans lequel le signe de la multiplication s'étend aux valeurs de λ_1, λ_2, etc.

Si dans un tel produit on a $n > 2$, on ne saurait attribuer aux indices, indépendamment les uns des autres, toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, puisque le produit ne pourrait converger à cause de l'infinité de valeurs de N dont le module analytique se trouverait au-dessous d'une limite donnée quelque faible qu'on la suppose, et parce que, en outre, on serait ainsi conduit à des fonctions possédant une périodicité triple ou supérieure. Cela a lieu déjà quand $n = 2$ pour le cas spécial d'une valeur réelle de la constante. Ces produits multiples n'auraient plus alors, comme les produits simples et doubles, de sens analytique déterminé si l'on voulait attribuer aux indices toutes les valeurs possibles. Mais rien ne s'oppose plus à la considération de ces produits multiples aussitôt qu'on soumet les indices à certaines *restrictions* qui puissent écarter précisément ces circonstances contraires à la convergence : par exemple, certaines *conditions d'inégalité* qu'on pourrait établir entre les indices λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et joindre au produit, de telle sorte que le signe de la multiplication s'étende aux valeurs des indices qui satisfont à ces conditions, les autres valeurs se trouvant exclues. Généralement parlant, on ne peut rien dire de plus ici sur le choix de ces équations de condition. Mais il existe une classe entière de fonctions semblables qui ont des rapports très-étroits avec certains résultats de la *Théorie des nombres;* et précisément les conditions d'inégalité dont nous parlons offrent une appropriation très-particulière pour cette nature de questions. Par exemple, on trouve toujours pour ces cas une combinaison d'un nombre déterminé de valeurs de l'expression N, qui acquiert une valeur réelle et *entière;* et les conditions d'inégalité ressortent alors de ce qu'elles réduisent à un N unique un groupe entier de valeurs en nombre infini de N pour lesquelles cette combinaison a la même valeur, et qui apparaissent comme termes d'une progression géométrique. Les fonctions auxquelles on est conduit par cette voie paraissent posséder des propriétés très-remarquables ; elles ouvrent la carrière aux plus belles recherches et semblent être le terrain où viennent se joindre les parties les plus difficiles de l'analyse et celles de la théorie des nombres.

Au reste, on pourrait appliquer aux *séries* auxquelles conduit la théorie des fonctions elliptiques, des considérations toutes semblables à celles qui viennent d'être exposées pour les produits infinis.