JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-G.-J. JACOBI

Sur l'application des transcendantes elliptiques à ce problème connu de la géométrie élémentaire : Trouver la relation entre la distance des centres et les rayons de deux cercles dont l'un est circonscrit à un polygone irrégulier et dont l'autre est inscrit à ce même polygone

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 435-444.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__435_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur l'application des transcendantes elliptiques à ce problème connu de la géométrie élémentaire: Trouver la relation entre la distance des centres et les rayons de deux cercles dont l'un est circonscrit à un polygone irrégulier et dont l'autre est inscrit à ce même polygone;

Par M. C.-G.-J. JACOBI.

(Extrait et traduit de l'allemand par M. Terquem [*]).

Dans les trois premiers paragraphes, M. Jacobi vérifie les relations trouvées par M. Steiner pour le triangle, quadrilatère, pentagone, hexagone et octogone, en les comparant aux relations, pour les mêmes polygones, données depuis longtemps par Nicolas Fuss, qui croyait que ses solutions n'étaient pas générales, parce qu'il les avait obtenues en plaçant les polygones de telle sorte que le diamètre commun aux deux cercles passât par le sommet d'un polygone inscrit. Mais cette position particulière n'ôte rien à la généralité des formules; car, d'après un théorème de M. Poncelet, lorsque le problème est possible pour une position d'un sommet, il l'est encore pour une position quelconque. Cette observation est de M. Jacobi. Nous passons à l'objet principal du Mémoire.

§ IV.

Nous allons maintenant établir les formules fondamentales sur lesquelles reposent les considérations suivantes. A cet effet, soient donnés deux cercles dont l'un, de rayon R et de centre C, enveloppe l'autre, de rayon r et de centre c. Désignons par a la distance Cc des deux centres. Par un point quelconque A pris sur le cercle C, on mène une tangente au cercle c, et qui coupe de nouveau le premier cercle en A'; on mène, de la même manière, au cercle c les tangentes A'A'', A''A''', A'''A$^{\text{IV}}$, etc., A, A', A'', A''', A$^{\text{IV}}$, etc., sont sur le cercle C, et AA'A''A'''... est la portion d'un polygone, ou un polygone non fermé, inscrit au cercle C et circonscrit au cercle c. On tire le diamètre com-

[*] Ce Mémoire fait partie du Journal de M. Crelle, tome III, page 376, année 1828.

mun Cc, qui coupe le cercle C en P, de sorte que

$$CP = R, \quad cP = R + a.$$

Maintenant, faisons les angles

$$ACP = 2\varphi, \quad A'CP = 2\varphi', \quad A''CP = 2\varphi'', \quad A'''CP = 2\varphi''', \quad \text{etc.};$$

on voit facilement que les relations suivantes existent entre deux angles consécutifs,

$$\begin{aligned}
R\cos(\varphi' - \varphi\ ) + a\cos(\varphi' + \varphi\ ) &= r,\\
R\cos(\varphi'' - \varphi'\ ) + a\cos(\varphi'' + \varphi'\ ) &= r,\\
R\cos(\varphi''' - \varphi'') + a\cos(\varphi''' + \varphi'') &= r,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

équations auxquelles on peut donner cette forme

$$\begin{aligned}
(R + a)\cos\varphi'\cos\varphi + (R - a)\sin\varphi'\sin\varphi &= r,\\
(R + a)\cos\varphi''\cos\varphi' + (R - a)\sin\varphi''\sin\varphi' &= r,\\
(R + a)\cos\varphi'''\cos\varphi'' + (R - a)\sin\varphi'''\sin\varphi'' &= r,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En soustrayant chacune de ces équations de la suivante, et en remarquant qu'on a

$$\frac{\cos x - \cos y}{\sin y - \sin x} = \operatorname{tang}\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi'' + \varphi}{2}\right) &= \frac{R - a}{R + a}\operatorname{tang}\varphi',\\
\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi''' + \varphi'}{2}\right) &= \frac{R - a}{R + a}\operatorname{tang}\varphi'',\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Sous cette forme, il saute aux yeux que ces équations coïncident avec celle qu'on donne pour la multiplication des transcendantes elliptiques.

En effet, soit l'intégrale elliptique

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}} = u,$$

où $\varkappa$ représente une constante quelconque; en posant, d'après une notation qui m'est particulière,

$$\varphi = am(u),$$

et de même

$$\alpha = am(t),$$

α désignant un angle quelconque, enfin

$$\varphi' = am\,(u+t),$$
$$\varphi'' = am\,(u+2t),$$

on sait, d'après le théorème fondamental des fonctions elliptiques, qu'on a

$$\operatorname{tang}\frac{(\varphi'+\varphi'')}{2} = \Delta am\,(t)\operatorname{tang}\varphi',$$

où

$$\Delta am\,(t) = \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2 am\,(t)}.$$

Si, dans le cas actuel, on détermine les grandeurs $\varkappa$ et t ou α par les deux équations

$$\frac{R-a}{R+a} = \Delta am\,(t) = \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\alpha},\qquad \varphi' = am\,(u+t),$$

on aura

$$\begin{aligned}
\varphi &= am\,(u),\\
\varphi' &= am\,(u+t),\\
\varphi'' &= am\,(u+2t),\\
\varphi''' &= am\,(u+3t),\\
\varphi^{\text{IV}} &= am\,(u+4t),\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et $2\varphi'$, $2\varphi''$, $2\varphi'''$, φ^{IV} sont donnés par les constructions indiquées au commencement de ce paragraphe.

§ V.

Déterminons maintenant α et $\varkappa$, ce qu'on effectue au moyen des équations

$$\varphi = am\,(u),\qquad \alpha = am\,(t),\qquad \varphi' = am\,(u+t),\qquad \Delta am\,(t) = \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\alpha} = \frac{R-a}{R+a}.$$

Les éléments de la théorie des fonctions elliptiques donnent

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\alpha} = \cos\alpha,$$

et nos formules de ci-dessus

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\,\frac{R-a}{R+a} = \frac{r}{R+a},$$

ce qui fournit, pour la détermination de α et de $\varkappa$, les deux équations

$$\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\alpha} = \frac{R-a}{R+a},\qquad \text{et}\qquad \cos\alpha = \frac{r}{R+a},$$

d'où il suit

$$\varkappa^2 = \frac{4Ra}{(R+a)^2 - r^2}, \qquad 1 - \varkappa^2 = \varkappa'^2 = \frac{(R-a)^2 - r^2}{(R+a)^2 - r^2}.$$

Ensuite on a

$$R + a = \frac{r}{\cos\alpha}, \qquad 2R = \frac{r(1+\Delta)}{\cos\alpha}, \qquad r = \frac{2R\cos\alpha}{1+\Delta},$$

$$R - a = \frac{r\Delta}{\cos\alpha}, \qquad 2a = \frac{r(1-\Delta)}{\cos\alpha}, \qquad a = \frac{R(1-\Delta)}{1+\Delta},$$

pour abréger, on a mis Δ au lieu de $\Delta am(t)$.

Ces formules donnent un moyen facile, lorsqu'on a

$$am(u) = \varphi, \qquad am(t) = \alpha,$$

de trouver $am(u+nt)$; ce qui est le problème de la multiplication des fonctions elliptiques, et cela par une construction de la géométrie élémentaire. D'un point c avec un rayon quelconque r, on décrit un cercle; et du centre C, éloigné de c de la distance $Cc = a$, on décrit un second cercle de rayon R, où a et R sont déterminés par les équations

$$a = \frac{r(1-\Delta)}{1+\Delta}, \qquad R = \frac{r(1+\Delta)}{2\cos\alpha}.$$

Si l'on prend le point A sur la circonférence du cercle C, de telle sorte que l'on ait

$$ACP = 2\varphi \ (\S\ \text{IV}),$$

et que l'on détermine les points A′, A″, A‴,..., $A^{(n)}$ par les constructions indiquées au commencement du précédent paragraphe, on aura

$$\frac{A^{(n)}CP}{2} = \varphi^{(n)} = am(u+nt).$$

Si l'on veut seulement déterminer $am(nt)$, alors le point A coïncide avec le point P.

D'ailleurs, il faut remarquer que les angles 2φ, $2\varphi'$, $2\varphi''$, $2\varphi'''$,... doivent toujours être pris en croissant, de manière qu'ils puissent dépasser 360 degrés.

Cette construction semble n'être pas sans quelque avantage sur celle de Lagrange, au moyen du triangle sphérique.

§ VI.

C'est une circonstance bien remarquable que les grandeurs $\varkappa$ et α sont entièrement indépendantes de φ et de u; ainsi, quelque part qu'on prenne le point A sur la circonférence du cercle C, et si

$$\frac{ACP}{2} = \varphi = am(u), \qquad \frac{A'CP}{2} = \varphi' = am(u+t),$$

la droite AA′ touchera toujours le cercle dont la position et la grandeur sont fixées par les équations

$$a = \mathrm{R}\left(\frac{1-\Delta}{1+\Delta}\right), \qquad r = \frac{2\mathrm{R}\cos\alpha}{1+\Delta}.$$

Car il faut se représenter CP comme une droite fixe, à partir de laquelle on compte l'angle 2φ, et dans laquelle est situé le centre du cercle c. De même, quelque part qu'on ait pris A, la droite AA″ touchera un cercle dont la position et la grandeur sont fixées par les équations

$$a = \mathrm{R}\left(\frac{1-\Delta^{(2)}}{1+\Delta^{(2)}}\right), \qquad r = \frac{2\mathrm{R}\cos\alpha^{(2)}}{1+\Delta^{(2)}},$$

si l'on pose

$$\alpha^{(2)} = am\,(2t), \qquad \Delta^{(2)} = \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\alpha^{(2)}},$$

et, en général, quelle que soit la position de A, la droite $\mathrm{AA}^{(n)}$ qui ferme le polygone, touchera un cercle dont les éléments sont donnés par les équations

$$a = \mathrm{R}\left(\frac{1-\Delta^{(n)}}{1+\Delta^{(n)}}\right), \qquad r = \frac{2\mathrm{R}\cos\alpha^{(n)}}{1+\Delta^{(n)}},$$

où

$$\alpha^{(n)} = am\,(nt), \qquad \Delta^{(n)} = \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\alpha^{(n)}}.$$

Les centres de tous ces cercles sont sur la droite CP.

Nous allons maintenant démontrer que tous ces cercles forment un système qui a la même droite pour *lieu des tangentes égales,* dénomination convenable que M. Steiner a introduite dans ses travaux géométriques. Pour deux cercles, c'est une droite perpendiculaire à la ligne des centres, et qui jouit de la propriété indiquée par son nom; si par un quelconque de ses points, on mène des tangentes aux deux cercles, ces tangentes sont égales. Comme nous savons déjà que tous ces cercles ont leurs centres sur la même droite, il nous faudra seulement faire voir qu'il existe sur cette droite un point tel que les tangentes menées aux cercles par ce point sont égales; car cette propriété appartiendra à tous les points de la droite, élevée par le point ainsi fixé, perpendiculairement à la droite des centres.

Cherchons donc le point de la droite AP qui jouit de cette propriété, relativement aux deux cercles C et c. Soit D la distance du point cherché à C; sa distance à c sera $\mathrm{D}-a$; la tangente au premier cercle est égale à $\sqrt{\mathrm{D}^2-\mathrm{R}^2}$ et au second cercle $=\sqrt{(\mathrm{D}-a)^2-r^2}$; donc

$$\mathrm{D}^2-\mathrm{R}^2 = (\mathrm{D}-a)^2+r^2,$$

d'où

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{R}^2+a^2-r^2}{2a} = \frac{(\mathrm{R}+a)^2-r^2}{2a} - \mathrm{R};$$

nous avons trouvé ci-dessus

$$z^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2 - r^2},$$

d'où

$$\frac{(R+a)^2 - r^2}{2a} = \frac{2R}{z^2};$$

et ainsi

$$D = \frac{2R}{z^2} - R.$$

Nous voyons que z ne paraît pas dans l'expression de D qui dépend seulement de $\varkappa$; mais, pour tous ces cercles, $\varkappa$ reste le même, et ils ne diffèrent que par α. Si nous avions donc cherché le lieu des tangentes égales pour C et un autre cercle, nous aurions trouvé la même expression pour D; ainsi, tous ces cercles ont en commun le même lieu des tangentes égales.

La détermination analytique des éléments du cercle, que la droite $AA^{(n)}$ touche constamment pendant que le point A se meut sur la circonférence du cercle C, serait même, pour de petites valeurs de n, d'une difficulté insurmontable; et, de cette manière, cette détermination est ramenée à une théorie connue, et le problème est résolu dans sa plus grande généralité.

La proposition spéciale que AA'' touche dans son mouvement constamment un cercle, peut s'énoncer ainsi :

Si l'on inscrit dans un cercle un angle en même temps circonscrit à un autre cercle, et si l'on fait mouvoir cet angle de telle sorte que son sommet parcoure la circonférence du premier cercle pendant que ses côtés touchent l'autre cercle, la corde du segment qu'il forme dans le premier cercle touche un troisième cercle ayant le lieu des tangentes égales commun avec les cercles donnés.

M. Poncelet énonce cette proposition dans son *Traité des propriétés projectives* (page 326).

Au moyen de la méthode des projections *perspectives,* on peut étendre cette proposition et l'appliquer au système de deux coniques.

§ VII.

M. Poncelet donne à sa proposition encore une bien plus grande extension. Nous avons supposé que les côtés du polygone touchent un seul et même cercle, ou, en projection, une seule et même conique. Mais M. Poncelet prescrit seulement que ces côtes touchent, suivant un certain ordre, des sections coniques données, tellement qu'une conique peut toucher plusieurs côtés, et alors plusieurs coniques sont censées se réunir en une seule. Ces coniques sont seulement assujetties à la condition qu'elles doivent avoir avec la conique dans laquelle le polygone est inscrit, les mêmes sécantes réelles ou idéales [*]. Ainsi :

Théorème. « Ayant inscrit à une section conique un polygone dont les côtés, à » l'exception d'un seul, touchent d'autres coniques, ayant mêmes sécantes communes » entre elles et avec la première, il arrivera qu'en faisant varier le polygone d'après » ces conditions, le côté libre et toutes les diagonales rouleront également sur d'autres » coniques ayant mêmes sécantes communes avec les proposées. »

Or, cette généralisation se déduit facilement de nos considérations sur les cercles, d'où l'on peut, par les projections, les appliquer à des coniques quelconques. Nous obtenons même de suite les éléments du cercle cherché dans toute sa généralité.

Désignons, comme ci-dessus, les cercles dans leur ordre de succession et d'après leurs centres $c, c', c'', c''', \ldots, c^{(n-1)}$, et leurs rayons par $r, r', r'', r''', \ldots, r^{(n-1)}$; et les distances de leurs centres à C, $cC = a$, $c'C = a'$, $c''C = a''$, $c'''C = a''', \ldots, c^{(m-1)}C = a^{(m-1)}$. Ensuite, déterminons les angles

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \ldots, \quad \alpha_{(n-1)},$$

$$\cos\alpha = \frac{r}{R+a}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{r'}{R+a'}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{r''}{R+a''}, \quad \cos\alpha_3 = \frac{r'''}{R+a'''}, \ldots, \quad \cos\alpha_{n-1} = \frac{r^{(n-1)}}{R+a^{(n-1)}},$$

et posons

$$\alpha = am\,t, \quad \alpha_1 = am\,t', \quad \alpha_2 = am\,t'', \quad \alpha_3 = am\,t''', \ldots, \quad \alpha_{n-1} = am\,t^{(n-1)}.$$

Maintenant, d'un point quelconque A pris sur le cercle C, menons la tangente AA′ au cercle c, la tangente A′A″ au cercle c', la tangente A″A‴ au cercle c'', et ainsi de suite; et finalement la tangente $A^{(n-1)}A^{(n)}$ au cercle $c^{(n-1)}$; tous les points $A, A', A'', \ldots, A^{(n)}$, sont sur la circonférence du cercle C; nommons derechef

$$ACP = 2\varphi, \quad A'CP = 2\varphi', \quad A''CP = 2\varphi'', \ldots, \quad A^{(m)}CP = 2\varphi^{(m)},$$

on aura, si $\varphi = am\,u$,

$$\varphi' = am\,(u+t), \quad \varphi'' = am\,(u+t+t'), \quad \varphi''' = am\,(u+t+t'+t''), \ldots, \quad \varphi^{(m)} = am\,(u+t'+\ldots t^{(n-1)}).$$

---

[*] M. Poncelet détermine la sécante commune de deux coniques à l'aide des propriétés suivantes, qui servent aussi à la définition la plus générale de ces sécantes. Soient AB, A′B′ deux demi-diamètres, respectivement conjugués dans chaque conique à la sécante commune; il faut, 1° que les deux diamètres, prolongés s'il est nécessaire, se coupent en un point O; ensuite, si l'on fait

$$AB = a, \quad A'B' = a',$$

et qu'on désigne par b et b' leurs conjugués respectifs, il faut qu'on ait, 2°

$$\frac{b^2}{a^2}.OA\ OB = \frac{b'^2}{a'^2}OA'.OB'.$$

Ces conditions, qui existent évidemment lorsque la sécante coupe réellement les deux coniques, sont encore satisfaites lorsque cette sécante est extérieure aux deux coniques, et, dans ce cas, M. Poncelet la désigne sous le nom de *sécante idéale*. Pour deux cercles qui ne se coupent pas, cette sécante idéale est le lieu des tangentes égales de M. Steiner.

Si l'on fait

$$t + t' + t'' + \ldots + t^{(n-1)} = \mathrm{S},$$

alors, d'après le § VI, la droite $A^{(n)}A$, qui ferme le polygone, roulera sur un cercle dont les éléments sont déterminés par les équations

$$r_n = \frac{2\,\mathrm{R}\cos am\mathrm{S}}{1 + \Delta am\mathrm{S}}, \quad a_n = \frac{\mathrm{R}(1 - \Delta am\mathrm{S})}{1 + \Delta am\mathrm{S}},$$

où r_m désigne le rayon et a_m la distance de son centre, situé sur la droite AP, au point C. La condition que tous les cercles ont en commun un même lieu de tangentes égales coïncide avec l'identité du module.

Ce qui précède donne une construction pour l'addition de plusieurs fonctions elliptiques, analogue à la construction que nous avons trouvée ci-dessus pour la multiplication. D'ailleurs, il résulte encore de nos formules que, dans quelque ordre que les côtés AA', $A'A''$, $A''A'''$, etc., touchent les cercles, le point final $A^{(n)}$ reste le même.

§ VIII.

Si l'on détermine maintenant K par l'équation

$$am\mathrm{K} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

on sait qu'on a

$$am(u + 2\mathrm{K}) = am(u) + \pi,$$

et généralement, i étant un nombre entier,

$$am(u + 2i\mathrm{K}) = i\pi + am\,u.$$

Ceci posé, si $AA'A''\ldots A^{(n)}A$ renferme i fois la circonférence, nous aurions dû, pour plus d'exactitude, écrire

$$\mathrm{S} = 2i\mathrm{K} - (t + t' + t'' + \ldots t^{(n-1)});$$

mais cela ne change rien aux expressions de a_n et de r_n. Si tous les cercles c, c', c'',..., $c^{(n-1)}$, $c^{(n)}$ se réduisent au seul cercle c, alors le polygone se ferme et est inscrit au cercle C et circonscrit au cercle c; pour ce cas

$$\mathrm{S} = t = t' = t'' \ldots = t^{(n-1)};$$

donc

$$(n+1)t = 2i\mathrm{K} \quad \text{et} \quad t = \frac{2i\mathrm{K}}{n+1};$$

c'est l'expression analytique de la relation qui doit avoir lieu entre les grandeurs et la position de deux cercles, pour qu'on puisse inscrire à l'un un polygone de $n+1$ côtés, qui soit circonscrit à l'autre, et qui mesure i fois toute la circonférence. Pour ceux qui n'ont pas l'habitude de nos notations, nous allons transcrire ce théorème de cette manière :

Théorème. « r et R étant les rayons de deux cercles, dont l'un est circonscrit à un » polygone de n sommets et dont l'autre y est inscrit, soit a la distance de leurs centres; » si l'on détermine $\varkappa$ et α par les équations

$$\cos\alpha = \frac{r}{R+r}, \quad \varkappa^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2 - r^2},$$

» on a toujours

$$\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} = \frac{i}{m}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},$$

» où i désigne le nombre de fois que le polygone parcourt la circonférence. Cette équa- » tion donne en même temps l'équation de condition qui doit exister entre R, r et a. »

L'équation de condition

$$t = \frac{2iK}{m}$$

étant entièrement indépendante de u, il s'ensuit que le choix du point initial A, ainsi que M. Poncelet le dit, n'est d'aucune influence. Du reste, on peut toujours admettre que i et m n'ont pas de facteur commun, sans cela le polygone revient sur lui-même.

Ainsi, le problème énoncé en tête de ce Mémoire est complétement résolu dans toute sa généralité.

§ IX.

Soit $m = 2p$; ainsi le polygone est d'un nombre pair de côtés; alors A et $A^{(p)}$, A' et $A^{(p+1)}$, A'' et $A^{(p+2)}$,..., $A^{(p-1)}$ et $A^{(2p-1)}$ sont des sommets opposés; et $AA^{(p)}$, $A'A^{(p+1)}$, $A''A^{(p+2)}$, etc., sont des diagonales qui réunissent ces sommets; ces diagonales, d'après ce qui précède, toucheront donc un cercle, dont les éléments sont déterminés par les équations

$$a = \frac{R[1-\Delta am(pt)]}{1+\Delta am(pt)}, \quad r = \frac{2R\cos am(pt)}{1+\Delta am(pt)}.$$

Mais comme on a

$$t = \frac{2iK}{2p},$$

où i est un nombre impair, il vient

$$pt = iK \quad \text{et} \quad am(pt) = \frac{i\pi}{2};$$

donc

$$r = 0, \quad a = R\,\frac{1-\sqrt{1-\varkappa^2}}{1+\sqrt{1+\varkappa^2}}.$$

Ainsi le cercle se réduit à un point dans lequel se coupent toutes les diagonales et qui reste fixe pour le nombre infini de polygones qu'on peut construire, sous ces conditions, pour diverses positions du point initial A ; car la détermination de ce point, renfermée dans l'équation

$$a = R\,\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{1+\sqrt{1+z^2}},$$

est entièrement indépendante de u ou de φ. Ce point est un des deux qui servent en quelque sorte de limite à la série des cercles qui ont le même lieu de tangentes égales, et par lesquels passent tous les cercles qui ont leurs centres sur la droite des tangentes égales, et coupent orthogonalement la série des cercles. (*Voir* le Mémoire de M. Steiner, Journal de M. Crelle, tome I^er^, page 161.)

M. Poncelet a étendu ce théorème au système de deux coniques (*Propriétés projectives*, page 364). Il ne serait peut-être pas sans intérêt pour la théorie des fonctions elliptiques, d'établir des considérations analogues immédiatement sur le système de deux coniques. L'intégrale pourrait se présenter sous une forme compliquée, qui devra pourtant se ramener à la forme plus simple trouvée ci-dessus. Je pourrai revenir sur ce sujet dans une autre occasion.