JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM THOMSON

Extrait d'une lettre de M. William Thomson à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 364-367.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__364_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. WILLIAM THOMSON

A M. LIOUVILLE.

« Cambridge, 8 octobre 1845.

» ... Pendant mon séjour à Paris, je vous ai parlé du principe des *images* pour la solution de quelques problèmes relatifs à la distribution de l'électricité. Il y a une foule de problèmes auxquels je ne pensais pas alors, et où j'ai trouvé plus tard qu'on peut l'appliquer. Par exemple, on parvient ainsi à exprimer algébriquement la distribution d'électricité sur deux plans conducteurs qui se coupent sous un angle $\frac{\pi}{i}$, quand un point électrique est posé dans l'espace entre les deux plans. (L'idée est analogue à celle de *kaléidoscope* de Brewster.) Quand il y a trois plans qui se coupent perpendiculairement, ou quand il y a un plan qui coupe perpendiculairement deux plans qui se coupent sous un angle $\frac{\pi}{i}$, on peut également trouver la distribution sous l'influence d'un point électrique donné. On peut aussi exprimer très-facilement la distribution sur les parois intérieures d'un parallélipipède rectangulaire creux, soumis à l'influence d'un point électrique posé en dedans, en se servant des intégrales définies.

» Soient C le centre d'une sphère S; Q, Q' deux points pris sur un même rayon CA et sur son prolongement, de telle manière que

$$CQ.CQ' = CA^2;$$

et P un point quelconque sur la surface S. On a, comme on sait,

$$\frac{PQ}{PQ'} = \frac{AQ}{AQ'}.$$

On peut, à cause de ce théorème, appeler Q et Q' *points réciproques* *relatifs à la sphère* S, dont chacun est *l'image* de l'autre dans la sphère. Suivant cette définition, l'image d'une ligne ou surface sera le lieu des images de points pris sur cette ligne ou surface. Ainsi, on trouve que l'image d'un plan ou d'une sphère est toujours une sphère (le plan étant compris sous cette désignation). Les images de deux sphères se coupent sous le même angle, réel ou imaginaire, que les surfaces données.

» Soient Q, Q' deux points réciproques, relativement à une sphère S, et q, q', s leurs images et l'image de la sphère S dans une autre sphère donnée. Les points q, q' seront réciproques relativement à la sphère s.

» A l'aide de ces théorèmes, je parviens facilement à déterminer les images successives d'un point quelconque (qui n'est pas nécessairement dans la ligne qui passe par leurs centres), dans deux sphères qui se coupent sous un angle donné. Quand cet angle est imaginaire, je parviens ainsi à exprimer la distribution de l'électricité sur les deux sphères, sous l'influence d'un point quelconque, chargé d'électricité, au moyen des séries de M. Poisson (qui convergent comme des séries géométriques). Quand l'angle d'intersection est réel et compris dans l'expression $\frac{\pi}{i}$, on parvient ainsi à exprimer algébriquement la distribution d'une quantité donnée d'électricité sur la surface extérieure des sphères, qui n'est soumise à aucune influence ou qui l'est à celle d'un point donné. S'il y a trois surfaces sphériques qui se coupent perpendiculairement, on exprime algébriquement, par les mêmes principes, la distribution sur la surface extérieure. Je parviens aussi à déterminer les températures stationnaires dans l'intérieur d'une lentille dont les deux surfaces se coupent sous un angle $\frac{\pi}{i}$, la température de chaque point de ces surfaces étant donnée.

» Si l'on veut déterminer la distribution d'électricité sur une surface donnée S, sous l'influence d'un point quelconque P, on réduit, par les mêmes principes, le problème à la détermination de la distribution, sans aucune influence, sur l'image de S dans une sphère décrite du centre P, avec un rayon quelconque. Une application générale de ce théorème conduit à une démonstration rigoureuse du théorème de M. Gauss, qu'on peut produire, au moyen d'une distribution déterminée de matière sur une surface fermée quelconque, une valeur donnée du potentiel à chaque point de la surface. Il y a aussi beaucoup d'applications spéciales qu'on peut faire de ce théorème aux cas dans lesquels S est une sphère, un disque circulaire, ou un segment d'une surface sphérique fait par un plan. J'en ai aussi déduit une démonstration géométrique du théorème que vous avez publié dans le numéro d'avril 1845 de votre Journal (*voir* page 137), dont voici l'expression analytique :

» Par une transformation convenable, on trouve

$$(a)\qquad U = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{[d\zeta]^n}{(\Sigma\zeta^2+u^2)^{\frac{n+1}{2}}(\Sigma\zeta^2-2\zeta_1 f+f^2+u'^2)^{\frac{n-1}{2}}},$$

où

$$f^2 = \Sigma(x-x')^2.$$

Maintenant, posons

$$\zeta_1 = \rho\cos\Phi,\quad \zeta_2 = \rho\sin\Phi\cos\theta_1,\quad \zeta_3 = \rho\sin\Phi\sin\theta_1\cos\theta_2,\ldots,$$
$$\zeta_{n-1} = \rho\sin\Phi\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\cos\theta_{n-2},\quad \zeta_n = \rho\sin\Phi\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2},$$

d'où nous tirons

$$[d\zeta]^n = \rho^{n-1}\sin^{n-2}\Phi.\sin^{n-3}\theta_1.\sin^{n-4}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}.[d\theta]^{n-2}\,d\Phi\,d\rho,$$

ce qui est une transformation donnée par Green. L'équation (a) se trouve ainsi réduite à

$$(b)\qquad U = H_{n-2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^{n-1}\sin^{s-2}\Phi\,d\Phi\,d\rho}{(\rho^2+u^2)^{\frac{n+1}{2}}(\rho^2-2\rho f\cos\Phi+f^2+u'^2)^{\frac{n-1}{2}}},$$

où H_{n-2} désigne la valeur du produit

$$\int_0^{\pi}\sin^{s-3}\theta\,d\theta.\int_0^{\pi}\sin^{s-2}\theta\,d\theta\ldots\int_0^{\pi}d\theta.$$

» Soit

$$\rho = u\tang\tfrac{1}{2}\vartheta;$$

on trouve ainsi

$$Uu = \tfrac{1}{2}H_{n-2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^{s-1}\vartheta\sin^{s-2}\Phi\,d\Phi\,d\vartheta}{[2(f^2+u'^2+u^2)+2(f^2+u'^2-u^2)\cos\vartheta-4uf\sin\vartheta\cos\Phi]^{\frac{s-1}{2}}}.$$

Posons maintenant

$$2(f^2 + u'^2 + u^2) = h^2 + k^2,$$
$$2(f^2 + u'^2 - u^2)\cos\vartheta - 4uf\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$= [4(f^2 + u'^2 - u^2)^2 + 4u^2 f^2]\cos\theta$$
$$= 2hk\cos\theta,$$
$$\sin\Phi\sin\vartheta = \sin\varphi\sin\theta,$$

d'où nous tirons

$$h^2 = (u' + u)^2 + f^2, \quad k^2 = (u' - u)^2 + f^2,$$
$$\sin\vartheta\, d\Phi\, d\vartheta = \sin\theta\, d\varphi\, d\theta,$$

et l'expression se réduit à

$$\begin{aligned} Uu &= \tfrac{1}{2}\mathrm{H}_{n-2}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\sin^{s-1}\theta\sin^{s-2}\varphi\, d\varphi\, d\theta}{(h^2 - 2hk\cos\theta + k^2)^{\frac{n-1}{2}}} \\ &= \mathrm{H}_{n-1}\int_0^\pi\frac{\sin^{s-1}\theta\, d\theta}{(h^2 - 2hk\cos\theta + k^2)^{\frac{n-1}{2}}}. \end{aligned}$$

Soit

$$h\sin(\psi - \theta) = k\sin\psi,$$

on trouvera facilement, à cause de $h > k$,

$$Uu = \frac{\mathrm{H}_n}{h^{n-1}},$$

ou

$$Uu = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{1}{[\Sigma(x - x'^2) + (u + u')^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

» Je vais publier ces recherches dans le *Cambridge and Dublin mathematical Journal* [*] aussitôt que possible, mais vous pouvez faire ce que vous voudrez du résumé précédent. »

---

[*] C'est le titre que portera désormais le *Cambridge mathematical Journal*, excellent Recueil dans la direction duquel M. William Thomson vient de remplacer M. Robert Leslie Ellis.

(J. L.)