JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JACOBI

Sur le principe du dernier multiplicateur et sur son usage comme nouveau principe général de mécanique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 337-346.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__337_0>

Sur le principe du dernier multiplicateur et sur son usage comme nouveau principe général de mécanique;

Par M. JACOBI.

[Article traduit de l'italien et extrait *dal Giornale arcadico.*]

I.

Je démontrerai d'abord un lemme de calcul intégral, lemme important par ses applications à la recherche des intégrales d'un système d'équations différentielles, et en particulier des équations auxquelles on ramène la détermination du mouvement d'un système de points matériels.

Lemme. « Soient X, X_1, $X_2,\ldots$, X_n des fonctions quelconques des variables x, $x_1,\ldots$,
» x_n; et M et u deux autres fonctions des mêmes variables qui vérifient les équations
» aux différences partielles suivantes :

$$\frac{d.\mathrm{MX}}{dx} + \frac{d.\mathrm{MX}_1}{dx_1} + \ldots + \frac{d.\mathrm{MX}_n}{dx_n} = 0,$$

$$\mathrm{X}\frac{du}{dx} + \mathrm{X}_1\frac{du}{dx_1} + \ldots + \mathrm{X}_n\frac{du}{dx_n} = 0.$$

» Posons

$$u = \alpha,$$

» α étant une constante arbitraire; et de cette équation tirons la valeur de x_n pour la
» substituer dans les fonctions X, $X_1,\ldots$, X_{n-1} et dans la quantité

$$\mathrm{M}_1 = \frac{\mathrm{M}}{\left(\frac{du}{dx_n}\right)}.$$

» La fonction M_1 des variables x, $x_1,\ldots$, x_{n-1} vérifiera une équation analogue à celle
» à laquelle satisfait M, savoir :

$$\frac{d.\mathrm{M}_1\mathrm{X}}{dx} + \frac{d.\mathrm{M}_1\mathrm{X}_1}{dx_1} + \ldots + \frac{d.\mathrm{M}_1\mathrm{X}_{n-1}}{dx_{n-1}} = 0. \text{ »}$$

Démonstration. L'équation à démontrer,

$$\frac{d.\mathrm{M}_1\mathrm{X}}{dx} + \frac{d.\mathrm{M}_1\mathrm{X}_1}{dx_1} + \ldots + \frac{d.\mathrm{M}_1\mathrm{X}_{n-1}}{dx_{n-1}} = 0,$$

peut se mettre sous la forme

$$X\frac{d.\log M_1}{dx}+X_1\frac{d.\log M_1}{dx_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{d.\log M_1}{dx_{n-1}}$$
$$+\frac{dX}{dx}+\frac{dX_1}{dx_1}+\ldots+\frac{dX_{n-1}}{dx_{n-1}}=0.$$

Les quantités X, $X_1,\ldots, X_{n-1}$ et M_1, qui sont regardées comme fonctions des variables indépendantes $x, x_1,\ldots, x_{n-1}$, contiennent cependant dans leur expression primitive la variable x_n qui dépend des autres en vertu de l'équation

$$u=\alpha.$$

En conservant donc cette forme primitive, l'équation précédente devra être écrite ainsi :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&X\frac{d.\log M_1}{dx}+X_1\frac{d.\log M_1}{dx_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{d.\log M_1}{dx_{n-1}}\\
&+\frac{d\log M_1}{dx_n}\left(X\frac{dx_n}{dx}+X_1\frac{dx_n}{dx_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\right)\\
&+\frac{dX}{dx}+\frac{dX_1}{dx_1}+\ldots+\frac{dX_{n-1}}{dx_{n-1}}\\
&+\frac{dX}{dx_n}\frac{dx_n}{dx}+\frac{dX_1}{dx_n}\frac{dx_n}{dx_1}+\ldots+\frac{dX_{n-1}}{dx_n}\frac{dx_n}{dx_{n-1}}=0.
\end{aligned}\right.$$

Les valeurs des dérivées partielles

$$\frac{dx_n}{dx_1},\quad \frac{dx_n}{dx_2},\ldots,$$

se déduisent de l'équation

$$u=\alpha,$$

au moyen de la formule

$$\frac{dx_n}{dx_i}=-\frac{\left(\frac{du}{dx_i}\right)}{\left(\frac{du}{dx_n}\right)}.$$

Ainsi on aura

$$X\frac{dx_n}{dx}+X_1\frac{dx_n}{dx_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{dx_n}{dx_{n-1}}$$
$$=-\frac{1}{\left(\frac{du}{dx_n}\right)}\left(X\frac{du}{dx}+X_1\frac{du}{dx_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{du}{dx_{n-1}}\right).$$

A cause de

$$X\frac{du}{dx}+X_1\frac{du}{dx_1}+\ldots+X_n\frac{du}{dx_n}=0,$$

il viendra donc

$$X\frac{dx_n}{dx}+X_1\frac{dx_n}{dx_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{dx_n}{dx_{n-1}}=X_n. \tag{2}$$

En outre, on a

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{dX}{dx_n}\frac{dx_n}{dx}+\frac{dX_1}{dx_n}\frac{dx_n}{dx_1}+\ldots+\frac{dX_{n-1}}{dx_n}\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\\ &=-\frac{1}{\left(\frac{du}{dx_n}\right)}\left(\frac{dX_n}{dx_n}\frac{du}{dx}+\frac{dX_1}{dx_1}\frac{du}{dx_1}+\ldots+\frac{dX_{n-1}}{dx_n}\frac{du}{dx_{n-1}}\right).\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Or l'équation

$$-\left(X\frac{du}{dx}+X_1\frac{du}{dx_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{du}{dx_{n-1}}\right)=X_n\frac{du}{dx_n},$$

différentiée par rapport à x_n et divisée par $\frac{du}{dx_n}$, fournit

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\left(\frac{du}{dx_n}\right)}\left(\frac{dX}{dx_n}\frac{du}{dx}+\frac{dX_1}{dx_n}\frac{du}{dx_1}+\ldots+\frac{dX_{n-1}}{dx_n}\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\right)\\ &=\frac{dX_n}{dx_n}+X\frac{d.\log\frac{du}{dx_n}}{dx}+X_1\frac{d.\log\frac{du}{dx_n}}{dx_1}+\ldots\\ &\qquad+X_{n-1}\frac{d.\log\frac{du}{dx_n}}{dx_{n-1}}+X_n\frac{d.\log\frac{du}{dx_n}}{dx_n},\end{aligned}$$

d'où, par la formule (3), résulte

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{dX}{dx_n}\frac{dx_n}{dx}+\frac{dX_1}{dx_n}\frac{dx_n}{dx_1}+\ldots+\frac{dX_{n-1}}{dx_n}\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\\ &=\frac{dX_n}{dx_n}+X\frac{d.\log\frac{du}{dx_n}}{dx}+X_1\frac{d.\log\frac{du}{dx_n}}{dx_1}+\ldots+X_n\frac{d.\log\frac{du}{dx_n}}{dx_n}.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Combinant les formules (2) et (4) avec la formule (1), on obtient

$$\begin{aligned}0&=X\frac{d.\log M_1}{dx}+X_1\frac{d.\log M_1}{dx_1}+\ldots+X_n\frac{d.\log M_1}{dx_n}\\ &+X\frac{d.\log\frac{du}{dx_n}}{dx}+X_1\frac{d.\log\frac{du}{dx_n}}{dx_1}+\ldots+X_n\frac{d.\log\frac{du}{dx_n}}{dx_n}\\ &+\frac{dX}{dx}+\frac{dX_1}{dx_1}+\ldots+\frac{dX_{n-1}}{dx_{n-1}}+\frac{dX_n}{dx_n},\end{aligned}$$

et, comme

$$M_1 \frac{du}{dx_n} = M,$$

on en conclut

$$0 = X\frac{d.\log M}{dx} + X_1\frac{d.\log M}{dx_1} + \ldots + X_n\frac{d.\log M}{dx_n} + \frac{dX}{dx} + \frac{dX_1}{dx_1} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n},$$

formule qui, multipliée par M, se change en

$$0 = \frac{d.MX}{dx} + \frac{d.MX_1}{dx_1} + \ldots + \frac{d.MX_n}{dx_n}.$$

Ainsi l'équation à démontrer se trouve réduite à l'équation même qui sert à définir la fonction M. Le lemme est donc démontré.

Ayant

$$X\frac{du}{dx} + X_1\frac{du}{dx_1} + \ldots + X_n\frac{du}{dx_n} = 0,$$

on peut définir l'équation

$$u = \alpha$$

comme étant une intégrale première du système des équations différentielles ordinaires

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n;$$

c'est ce que nous ferons désormais.

II.

De la même manière qu'on a déduit de M la fonction M_1, on pourra de M_1 déduire une nouvelle fonction M_2, puis de M_2 une autre fonction M_3, etc. Et le lemme précédent fournira successivement pour chacune de ces fonctions une équation aux différences partielles à laquelle elle devra satisfaire, le nombre des variables diminuant à chaque fois d'une unité.

Admettons que $u = \alpha$ soit une intégrale du système d'équations ordinaires

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

et qu'on ait

$$\frac{d.MX}{dx} + \frac{d.MX_1}{dx_1} + \ldots + \frac{d.MX_n}{dx_n} = 0;$$

la fonction

$$M_1 = \frac{M}{\left(\frac{du}{dx_n}\right)}$$

satisfera à l'équation

$$\frac{d.\mathrm{M}_1\mathrm{X}}{dx}+\frac{d.\mathrm{M}_1\mathrm{X}_1}{dx_1}+\ldots+\frac{d.\mathrm{M}_1\mathrm{X}_{n-1}}{dx_n}=0,$$

où, par le moyen de l'équation

$$u=\alpha,$$

on suppose la variable x_n éliminée de $\mathrm{X}, \mathrm{X}_1,\ldots, \mathrm{X}_{n-1}, \mathrm{M}_1$.

Soit $u_1=\alpha_1$ une intégrale des équations différentielles

$$dx : dx_1 :\ldots: dx_{n-1}=\mathrm{X} : \mathrm{X}_1 :\ldots: \mathrm{X}_{n-1},$$

α_1 désignant une nouvelle constante arbitraire; et posons

$$\mathrm{M}_2=\frac{\mathrm{M}_1}{\left(\frac{du_1}{dx_{n-1}}\right)};$$

on aura, par le même théorème,

$$\frac{d.\mathrm{M}_2\mathrm{X}}{dx}+\frac{d.\mathrm{M}_2\mathrm{X}_1}{dx_1}+\ldots+\frac{d.\mathrm{M}_2\mathrm{X}_{n-2}}{dx_{n-2}}=0,$$

où $\mathrm{X}, \mathrm{X}_1,\ldots, \mathrm{X}_{n-2}, \mathrm{M}_2$ sont des fonctions de $x, x_1,\ldots, x_{n-2}$, la variable x_{n-1} ayant été éliminée au moyen de la seconde intégrale $u_1=\alpha_1$.

Soient α_2 une troisième constante arbitraire et $u_2=\alpha_2$ une intégrale des équations différentielles

$$dx : dx_1 :\ldots: dx_{n-2}=\mathrm{X} : \mathrm{X}_1 :\ldots: \mathrm{X}_{n-2},$$

et posons

$$\mathrm{M}_3=\frac{\mathrm{M}_2}{\frac{du_2}{dx_{n-2}}}=\frac{\mathrm{M}_1}{\frac{du_2}{dx_{n-2}}\cdot\frac{du_1}{dx_{n-1}}}=\frac{\mathrm{M}}{\frac{du_2}{dx_{n-2}}\cdot\frac{du_1}{dx_{n-1}}\cdot\frac{du}{dx_n}};$$

en éliminant x_{n-2} au moyen de l'équation $u_2=\alpha_2$, on aura

$$\frac{d.\mathrm{M}_3\mathrm{X}}{dx}+\frac{d.\mathrm{M}_3\mathrm{X}_1}{dx_1}+\ldots+\frac{d.\mathrm{M}_3\mathrm{X}_{n-3}}{dx_{n-3}}=0.$$

En continuant de cette manière, soient les intégrales successives

$$(5)\qquad u=\alpha,\quad u_1=\alpha_1,\ldots,\quad u_{n-2}=\alpha_{n-2},$$

où $\alpha, \alpha_1,\ldots, \alpha_{n-2}$ sont les constantes arbitraires, et où $u_i=\alpha_i$ est l'équation en $x, x_1, x_2,\ldots, x_{n-i}$ qui doit servir à éliminer x_{n-i}. Posons, en outre,

$$(6)\qquad \mathrm{M}_{n-1}=\frac{\mathrm{M}}{\frac{du}{dx_n}\cdot\frac{du_1}{dx_{n-1}}\cdots\frac{du_{n-2}}{dx_2}},$$

et l'élimination de $x_2, x_3,\ldots, x_n$ étant opérée au moyen des intégrales citées dans X, X_1

et M_{n-1}, l'application répétée du lemme que nous avons démontré nous donnera

$$\frac{d.M_{n-1}X}{dx}+\frac{d.M_{n-1}X_1}{dx_1}=0. \tag{7}$$

Or, quand les variables $x_2, x_3,\ldots, x_n$ ont été éliminées par le moyen des intégrales (5), c'est-à-dire de toutes les intégrales du problème sauf une seule, il ne reste plus à intégrer qu'une équation différentielle du premier ordre et à deux variables x_1, x_2, savoir, l'équation

$$X_1\,dx - X\,dx_1 = 0; \tag{8}$$

et la formule (7) prouve que la quantité M_{n-1} est le *multiplicateur* de cette équation différentielle. Ce multiplicateur rendant le premier membre de l'équation (8) une différentielle exacte, réduit l'intégration de cette équation à une simple quadrature. De là découle le théorème suivant qui, par son importance et sa fécondité, a paru mériter une dénomination particulière:

« Étant proposées les équations différentielles

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

» soit M une quantité satisfaisant à l'équation

$$\frac{d.MX}{dx}+\frac{d.MX_1}{dx_1}+\ldots+\frac{d.MX_n}{dx_n}=0;$$

» admettons qu'on ait trouvé toutes les intégrales à l'exception d'une seule, et repré-
» sentons par

$$u=\alpha,\quad u_1=\alpha_1,\ldots,\quad u_{n-2}=\alpha_{n-2},$$

» les intégrales qui nous sont connues, $\alpha, \alpha_1,\ldots, \alpha_{n-2}$ étant les constantes arbitraires;
» faisons servir successivement chacune de ces intégrales à l'élimination d'une variable,
» et que $u_i=\alpha_i$ soit l'équation en $x, x_1,\ldots, x_{n-i}$, qui sert à éliminer x_{n-i}; le multipli-
» cateur de la dernière équation différentielle

$$X_1\,dx - X\,dx_1 = 0$$

» sera

$$\mu=\frac{M}{\dfrac{du}{dx_n}\cdot\dfrac{du_1}{dx_{n-1}}\cdots\dfrac{du_{n-2}}{dx_2}},$$

» expression où, par le secours des intégrales trouvées, il n'entre plus que les deux
» variables x et x_1. »

Ainsi est démontré le principe du dernier multiplicateur, que *connaissant la quantité* M, *la dernière intégration s'effectue toujours par une simple quadrature.*

Quand on a

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dX_1}{dx_1}+\ldots+\frac{dX_n}{dx_n}=0, \tag{9}$$

on peut prendre $M = 1$; d'où il suit : « Qu'étant proposé ce système d'équations dif-
» férentielles ordinaires

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

» où

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dX_1}{dx_1} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n} = 0,$$

» et dont toutes les intégrales sont connues à l'exception d'une seule, la dernière équa-
» tion différentielle qui reste à traiter pourra toujours être intégrée à l'aide d'une
» simple quadrature. »

On trouvera dans le *Journal de M. Crelle* [*] des développements plus étendus sur ce sujet. Passons à l'application aux problèmes de mécanique.

III.

Principe du dernier multiplicateur dans les problèmes de mécanique.

Considérons les formules de dynamique relatives au mouvement de k points matériels. Les $3k$ coordonnées rectangulaires de ces k points étant

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_{3k-1},$$

posons, en outre,

$$(10) \qquad \frac{dx}{dt} = x_{3k}, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_{3k+1}, \ldots, \quad \frac{dx_{3k-1}}{dt} = x_n,$$

où

$$n = 6k - 1.$$

Admettons que les forces qui sollicitent les points matériels suivant des directions parallèles aux axes des coordonnées sont des fonctions des coordonnées $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$, indépendantes du temps et des vitesses; supposons, de plus, les points entièrement libres. Le mouvement de ces points dépendra du système suivant d'équations différentielles ordinaires,

$$(11) \qquad \frac{dx_{3k}}{dt} = X_{3k}, \quad \frac{dx_{3k+1}}{dt} = X_{3k+1}, \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

$X_{3k}, X_{3k+1}, \ldots, X_n$ étant des fonctions de $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$. Pour rendre ces formules encore plus semblables à celles des articles précédents, posons

$$x_{3k} = X, \quad x_{3k+1} = X_1, \ldots, \quad x_n = X_{3k-1}.$$

Les formules (10) et (11) réunies conduisent à ce système d'équations différentielles du

[*] Tomes XXVII et XXIX. Le Mémoire auquel l'auteur renvoie est écrit en latin, sous ce titre : *Theoria novi multiplicatoris systemati æquationum differentialium vulgarium applicandi.* (J. L.)

premier ordre,

$$(12) \qquad dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

après l'intégration duquel on pourra exprimer X en fonction de x seule et trouver le temps t par la formule

$$(13) \qquad t = \int \frac{dx}{X} + \text{constante}.$$

De là ce résultat connu que, dans les problèmes de dynamique, la dernière intégrale qui fournit le temps en fonction des coordonnées dépend d'une simple quadrature. Mais je dis que les *deux* dernières intégrales peuvent s'obtenir par des quadratures, et qu'outre l'intégrale (13) où il en entre une, on peut obtenir par le principe du dernier multiplicateur une autre intégrale, savoir, la dernière intégrale du système (12). En effet, $X_{3k}, X_{3k+1}, \ldots, X_n$ étant des fonctions de $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$ seulement, et les quantités $X, X_1, \ldots, X_{3k-1}$ étant égales aux variables $x_{3k}, x_{3k+1}, \ldots, x_n$, on voit que la fonction X_i ne contient jamais x_i, et que, par suite, on a, pour chaque valeur de i,

$$\frac{dX_i}{dx_i} = 0.$$

De là

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dX_1}{dx_1} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n} = 0.$$

Nous sommes donc dans le cas où l'on peut prendre $M = 1$. Partant, dès que l'on connaîtra toutes les intégrales, excepté une, du système (12), le multiplicateur de l'équation différentielle restante sera donné par la formule du dernier multiplicateur en y posant $M = 1$.

Le principe relatif aux deux dernières intégrales subsiste encore pour un système de points liés entre eux. Cela deviendra manifeste en écrivant, comme on va le voir, les équations de la dynamique sous une forme convenable.

Soit $3k - m$ le nombre des équations de condition pour notre système de k points matériels; exprimons les $3k$ coordonnés $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$ par m quantités indépendantes

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_m;$$

posons ensuite

$$\frac{dq_i}{dt} = q'_i;$$

la force vive T du système pourra s'exprimer par les quantités

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_m, \quad q'_1, \quad q'_2, \ldots, \quad q'_m.$$

Maintenant posons les équations

$$\frac{dT}{dq'_1} = p_1, \quad \frac{dT}{dq'_2} = p_2, \ldots, \quad \frac{dT}{dq'_m} = p_m.$$

lesquelles sont linéaires par rapport à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$; résolvons-les et tirons-en les valeurs de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_m$ en fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_m$, puis substituons ces valeurs dans T qui deviendra ainsi fonction de

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_m, \quad p_1, \quad p_2, \ldots, \quad p_m,$$

variables qu'il convient d'employer dans les problèmes de dynamique. Pour obtenir les équations qui s'y rapportent, concevons que x_i soit une des coordonnées du point où se trouve la masse m_i, et que ce point soit sollicité dans le sens des x_i par la force X_{3k+i}. En substituant les valeurs des coordonnées $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$ exprimées par $q_1, q_2, \ldots, q_m$, nous obtiendrons

$$m X_{3k}\, dx + m_1 X_{3k+1}\, dx_1 + \ldots + m_{3k-1} X_n\, dx_{3k-1} = Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2 + \ldots + Q_m\, dq_m.$$

Les quantités $X_{3k}, X_{3k+1}, \ldots$ étant fonctions de $x, x_1, \ldots, x_{3k-1}$ seulement, les quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ seront des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_m$; et les équations différentielles relatives à $q_1, q_2, \ldots, q_m, p_1, p_2, \ldots, p_m$ s'écriront ainsi :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{dT}{dp_1}, & \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{dT}{dq_1} + Q_1; \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{dT}{dp_2}, & \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{dT}{dq_2} + Q_2, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{dq_m}{dt} = \dfrac{dT}{dp_m}, & \dfrac{dp_m}{dt} = -\dfrac{dT}{dq_m} + Q_m. \end{array} \right.$$

La démonstration de ces formules générales peut se déduire de celle que M. Hamilton a donnée dans le cas où

$$m X_{3k}\, dx + m_1 X_{3k+1}\, dx_1 + \ldots + m_{3k-1} X_n\, dx_{3k-1}$$

est une différentielle exacte (*voyez* deux Mémoires que cet auteur a insérés dans les *Transactions philosophiques*, années 1834 et 1835). En éliminant l'élément dt, on les mettra sous la forme d'une proportion, savoir,

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_m \\ : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_m \\ = \dfrac{dT}{dp_1} : \dfrac{dT}{dp_2} : \ldots : \dfrac{dT}{dp_m} \\ : -\dfrac{dT}{dp_1} + Q_1 : \ldots : -\dfrac{dT}{dq_m} + Q_m. \end{array} \right.$$

On aura d'abord à intégrer les équations (15); ensuite le temps s'exprimera en fonction d'une seule des variables $q_1, q_2, \ldots, q_m$ par une simple quadrature. Recherchons donc la quantité M qui répond au système des équations (15). Or, quand il s'agissait du système d'équations

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n,$$

nous avons pris la dérivée de chaque fonction $X, X_1, \ldots, X_n$ par rapport à la variable à la différentielle de laquelle cette fonction est proportionnelle. Et la somme des dérivées en question étant nulle, nous en avons conclu que la dernière intégration se réduit à une simple quadrature. Dans les équations (15), prenons de même les dérivées de

$$\frac{dT}{dp_1}, \quad \frac{dT}{dp_2}, \ldots, \quad \frac{dT}{dp_m},$$

par rapport aux variables respectives

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_m,$$

et les dérivées de

$$-\frac{dT}{dq_1} + Q_1, \quad -\frac{dT}{dq_2} + Q_2, \ldots, \quad -\frac{dT}{dq_m} + Q_m,$$

respectivement aussi par rapport à

$$p_1, \quad p_2, \ldots, \quad p_m.$$

Or la somme de ces $2m$ dérivées s'évanouit encore, parce qu'en les combinant deux à deux on a pour toutes les valeurs de l'indice i,

$$\frac{d.\frac{dT}{dp_i}}{dq_i} + \frac{d\left(-\frac{dT}{dq_i} + Q_i\right)}{dp_i} = \frac{dQ_i}{dp_i} = 0.$$

Donc étant proposées les équations différentielles (15) relatives à un système de points liés entre eux, on pourra encore prendre $M = 1$, et par conséquent la dernière intégration s'effectuera par une simple quadrature.

Quand l'expression des forces contient explicitement le temps t, on ne peut plus obtenir, comme ci-dessus, la valeur de t à l'aide d'une simple quadrature. Mais, du moins, à l'aide du nouveau principe, on réduira aux quadratures l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre qui restera à la fin entre t et une des coordonnées.

Le même principe s'applique aussi au mouvement d'une comète dans un milieu résistant et à quelques cas particuliers du même genre.