JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULES VIEILLE

# Note relative à l'instabilité de l'équilibre d'un système de points matériels

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 10 (1845), p. 329-336.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__329_0>

gallica NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France*
http://gallica.bnf.fr/

*et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc*
http://www.numdam.org/journals/JMPA

# NOTE

RELATIVE

A L'INSTABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS;

PAR M. JULES VIEILLE.

Considérons un système de $n$ points matériels en équilibre, et liés entre eux d'une manière quelconque.

Désignons, comme à l'ordinaire, par X, Y, Z les composantes parallèles à trois axes rectangulaires de la force motrice qui sollicite le point $(x, y, z)$ dont la masse est $m$, et soient

$$(1) \qquad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots$$

les équations, au nombre de $i$, qui expriment les liaisons du système. L, M, N,... sont des fonctions des coordonnées $x, y, z, x', y', \ldots$ qu'on suppose ne pas renfermer le temps $t$ explicitement. Le nombre des coordonnées de tous les points matériels étant $3n$, il y aura $3n - i$ variables indépendantes, et l'on peut concevoir qu'on exprime toutes les coordonnées en fonction de ces variables.

Lorsque les forces données satisfont à la condition que la somme

$$\sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

étendue à tous les points du système, soit la différentielle exacte d'une fonction des coordonnées $x, y, z, x', \ldots$; ou, du moins, lorsque cette condition d'intégrabilité est remplie par la somme ci-dessus, après qu'on l'a réduite à ne contenir que les seules variables indépendantes; on sait que, pour les valeurs de ces variables qui répondent à la position d'équilibre, la *fonction des forces* (c'est ainsi qu'on appelle la fonction dont $\sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ est la différentielle) est, en général, un *maximum* ou un *minimum*.

De plus, si l'on vient à écarter un tant soit peu le système de cette position, on démontre que, dans le cas où la fonction des forces est un *maximum*, la somme des forces vives ne peut demeurer constamment positive, qu'autant que les variables qui déterminent à chaque instant la position du système restent toujours très-petites; en sorte que *l'équilibre est* alors *stable*. Mais ce genre de calcul ne fait pas voir que, dans le cas où la fonction des forces est un *minimum*, l'équilibre soit nécessairement *instable*.

Lagrange a résolu cette deuxième partie de la question dans la sixième section de la *Mécanique analytique*, où il étudie les oscillations très-petites d'un système de points matériels autour de leurs positions d'équilibre. Il y démontre incidemment l'instabilité de l'équilibre, dans le cas où la fonction est un minimum.

L'objet que nous nous proposons est de donner à cette démonstration une forme plus simple et propre à être admise dans l'enseignement.

Nous partirons de l'équation générale de la dynamique, savoir :

$$(2)\quad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

et d'abord, il convient d'y remplacer $x$, $y$, $z$, $x'$,... par leurs valeurs en fonction des $3n - i$ variables indépendantes.

Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... les valeurs de ces variables pour la position d'équilibre, et $p$, $q$, $r$,... les accroissements qu'elles prennent au bout du temps $t$ par suite d'un déplacement très-petit imprimé au système. $p$, $q$, $r$,... sont des fonctions inconnues du temps $t$, dont les valeurs sont d'abord très-petites, au commencement du mouvement; chacune des coordonnées $x$, $y$, $z$, $x'$,... est une fonction connue de $\alpha+p$, $\beta+q$, $\gamma+r$,... qui ne renferme pas $t$ explicitement. Nous supposerons, pour abréger l'écriture, que ces variables indépendantes soient au nombre de trois.

Lorsqu'on substitue les valeurs de $x$, $y$, $z$, $x'$,... dans la somme $\sum(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$, elle devient, par hypothèse, la différentielle exacte d'un fonction $\varphi(\alpha+p, \beta+q, \gamma+r)$; par conséquent, la même substitution, effectuée dans le second membre de l'équation (2) où les $d$ sont changés en $\delta$, donnera

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \delta.\varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r).$$

Tant que $p$, $q$, $r$ auront de très-petites valeurs, cette fonction $\varphi$ pourra être développée, par la formule de Taylor, en série très-convergente, ordonnée suivant les puissances et les produits de $p$, $q$, $r$. Comme $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ est un minimum, les termes de première dimension en $p$, $q$, $r$ seront nuls, et l'on aura

$$\varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$$
$$+ \frac{1}{1.2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Dpq + 2Epr + 2Fqr) + \varepsilon,$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = A, \quad \frac{d^2\varphi}{d\beta^2} = B, \quad \frac{d^2\varphi}{d\gamma^2} = C,$$
$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha d\beta} = D, \quad \frac{d^2\varphi}{d\alpha\gamma d} = E, \quad \frac{d^2\varphi}{d\beta d\gamma} = F.$$

$\varepsilon$ désigne l'ensemble des termes d'ordre supérieur au second, qu'il est inutile de développer. Nous supposons que le minimum de la fonction puisse être constaté par la considération des seuls termes du deuxième ordre; en sorte que le polynôme $(Ap^2 + Bq^2 + \ldots + 2Fqr)$ conserve constamment le signe $+$, quels que soient les signes et les grandeurs de $p$, $q$, $r$.

En prenant la variation de la fonction $\varphi$, et omettant les termes provenant de $\varepsilon$, lesquels contiendraient les carrés et les produits des variables $p$, $q$, $r$, supposées très-petites, on aura simplement

$$\delta.\varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r) = (Ap + Dq + Er)\,\delta p + (Dp + Bq + Fr)\,\delta q$$
$$+ (Ep + Fq + Cr)\,\delta r.$$

Si l'on compare entre eux les groupes de termes qui multiplient $\delta p$, $\delta q$, $\delta r$ dans le second membre de cette égalité, on remarquera que les coefficients des variables qui entrent dans un groupe se répètent tous une fois dans les autres groupes, à l'exception du coefficient de la variable soumise au signe $\delta$ dans ce même groupe, lequel ne se répète pas. Par exemple, les coefficients D et E du premier groupe qui est affecté de $\delta p$, se retrouvent une fois dans les autres groupes, savoir, D dans le second groupe et E dans le troisième, et, de plus, ils multiplient précisément la variable $p$ dans ces groupes. Mais le coefficient A n'est pas répété. Cette remarque, qui nous sera utile plus loin, subsiste évidemment quel que soit le nombre des variables indépendantes.

Considérons actuellement le premier membre de l'équation (2). On a, pour chaque coordonnée, un développement en série de la forme

$$\begin{aligned}
x &= a + a_1 p + a_2 q + a_3 r + \zeta,\\
y &= b + b_1 p + b_2 q + b_3 r + \eta,\\
z &= c + c_1 p + c_2 q + c_3 r + \theta,\\
x' &= a' + a'_1 p + a'_2 q + a'_3 r + \zeta',\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

$\zeta$, $\eta$, $\theta$, $\zeta'$,... désignent l'ensemble des termes du deuxième ordre et des ordres supérieurs. Les coefficients $a$, $a_1$, $a_2$,..., $b$, $b_1$,... etc., sont des constantes données.

On en déduira les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, et aussi celles de $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$; et l'on négligera les termes qui proviendront des restes $\zeta$, $\eta$, $\theta$,..., parce que, dans les produits $\frac{d^2x}{dt^2}\delta x$, $\frac{d^2y}{dt^2}\delta y$, etc., ces termes introduiraient les carrés et les produits de $p$, $q$, $r$, et de leurs dérivées, que nous sommes convenus de négliger. On aura ainsi

$$\begin{aligned}
\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) &= \left(\mathrm{A}'\frac{d^2p}{dt^2} + \mathrm{D}'\frac{d^2q}{dt^2} + \mathrm{E}'\frac{d^2r}{dt^2}\right)\delta p\\
+\left(\mathrm{D}'\frac{d^2p}{dt^2} + \mathrm{B}'\frac{d^2q}{dt^2} + \mathrm{F}'\frac{d^2r}{dt^2}\right)\delta q &+ \left(\mathrm{E}'\frac{d^2p}{dt^2} + \mathrm{F}'\frac{d^2q}{dt^2} + \mathrm{C}'\frac{d^2r}{dt^2}\right)\delta r,
\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned}
\sum m(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) &= \mathrm{A}', & \sum m(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) &= \mathrm{D}',\\
\sum m(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) &= \mathrm{B}', & \sum m(a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3) &= \mathrm{E}',\\
\sum m(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2) &= \mathrm{C}', & \sum m(a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3) &= \mathrm{F}'.
\end{aligned}$$

Il y a, sur la composition des groupes qui multiplient $\delta p$, $\delta q$, $\delta r$ dans le deuxième membre de l'équation ci-dessus, une remarque analogue à celle que nous avons faite plus haut. Chaque coefficient se trouve répété deux fois, à l'exception du coefficient de la dérivée de la variable soumise au signe $\delta$ dans le groupe que l'on considère. Ainsi, par exemple, les coefficients $D'$ et $E'$ du premier groupe en $\delta p$ se retrouvent, l'un dans le deuxième groupe, l'autre dans le troisième, et ils y multiplient précisément les dérivées de la variable $p$. Ce fait est général, et a lieu quel que soit le nombre des variables indépendantes.

Les deux membres de l'équation (2) étant ainsi transformés, on devra égaler séparément les coefficients de chacune des variations indépendantes $\delta p$, $\delta q$, $\delta r$, que ces deux membres renferment. Il en résultera des équations linéaires à coefficients constants, en même nombre que les variables indépendantes $p$, $q$, $r$, et propres à déterminer par approximation ces variables en fonction du temps, du moins tant qu'elles resteront très-petites.

Ces équations sont ici au nombre de trois, savoir :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &A'\frac{d^2p}{dt^2} + D'\frac{d^2q}{dt^2} + E'\frac{d^2r}{dt^2} - Ap - Dq - Er = 0,\\ &D'\frac{d^2p}{dt^2} + B'\frac{d^2q}{dt^2} + F'\frac{d^2r}{dt^2} - Dp - Bq - Fr = 0,\\ &E'\frac{d^2p}{dt^2} + F'\frac{d^2q}{dt^2} + C'\frac{d^2r}{dt^2} - Ep - Fq - Cr = 0.\end{aligned}\right.$$

En rapprochant les deux remarques que nous avons faites ci-dessus, on peut dire que tout coefficient de l'une de ces équations se retrouve dans l'une des autres, à l'exception des deux coefficients relatifs à la variable $p$ dans la première équation, à la variable $q$ dans la deuxième, à la variable $r$ dans la troisième, lesquels ne sont pas répétés. De plus, les coefficients relatifs à une variable, et susceptibles de répétition, dans l'une des équations, deviennent, dans les autres équations, coefficients relatifs à la variable pour laquelle il n'y avait pas répétition dans l'équation d'où l'on est parti.

Nous allons maintenant démontrer que, dans le cas où la fonction $\varphi$ est un minimum, les valeurs de $p$, $q$, $r$, qui vérifient ces équations, ne sauraient demeurer toujours très-petites, quelle qu'ait été leur petitesse dans l'origine. Il en faudra conclure que l'hypothèse d'un mouvement oscillatoire dans lequel les points du système resteraient toujours très-voisins de leurs positions d'équilibre, est inadmissible, et par conséquent que l'équilibre est instable.

On sait qu'on satisfait aux équations (3) par des valeurs de la forme

$$p = k\mathrm{H}\sin(t\sqrt{\rho} - h), \quad q = k'\mathrm{H}\sin(t\sqrt{\rho} - h), \quad r = k''\mathrm{H}\sin(t\sqrt{\rho} - h),$$

H et $h$ étant des constantes arbitraires, et l'on a, pour déterminer $\rho$ et les rapports $\frac{k'}{k}$, $\frac{k''}{k}$, les trois équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho(\mathrm{A}'k + \mathrm{D}'k' + \mathrm{E}'k'') + (\mathrm{A}k + \mathrm{D}k' + \mathrm{E}k'') = 0,\\ &\rho(\mathrm{D}'k + \mathrm{B}'k' + \mathrm{F}'k'') + (\mathrm{D}k + \mathrm{B}k' + \mathrm{F}k'') = 0,\\ &\rho(\mathrm{E}'k + \mathrm{F}'k' + \mathrm{C}'k'') + (\mathrm{E}k + \mathrm{F}k' + \mathrm{C}k'') = 0.\end{aligned}\right.$$

De deux d'entre elles, on déduira les valeurs des rapports $\frac{k'}{k}$, $\frac{k''}{k}$, sous forme de fonctions rationnelles contenant la deuxième puissance de $\rho$, et la substitution de ces valeurs dans la troisième équation fournira une équation en $\rho$ du troisième degré. En général, cette équation en $\rho$ sera d'un degré marqué par le nombre des variables qui servent à déterminer la position du système. A chacune des racines de cette équation correspondra un système de valeurs des rapports $\frac{k'}{k}$, $\frac{k''}{k}$: on pourra prendre, pour la symétrie, $k$ égal au dénominateur commun de ces rapports. De cette manière, on aura trois systèmes de valeurs particulières pour $p$, $q$, $r$, et il ne restera qu'à en faire la somme (en affectant dans chaque système les constantes arbitraires H et $h$ d'un caractère différent) pour avoir les intégrales générales des équations (3). Quant aux six constantes arbitraires, on les déterminera au moyen des valeurs données de $p$, $q$, $r$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ pour $t = 0$; comme ces dernières sont supposées très-petites, il est visible que les valeurs de H le seront aussi; et, par suite, les valeurs de $p$, $q$, $r$ seront très-petites, du moins au commencement du mouvement, ainsi que cela devait être.

Or, sans prendre la peine de composer l'équation en $\rho$, on peut s'assurer aisément qu'elle n'aura pas de racines *réelles et positives;* et cela suffira pour prouver l'instabilité de l'équilibre. Car alors les valeurs de $\sqrt{\rho}$ étant toutes imaginaires, les sinus qui entrent dans les expressions de $p$, $q$, $r$ se transformeront *tous* en exponentielles réelles, et, par suite, les valeurs générales de $p$, $q$, $r$ se composeront de termes de la forme

$$(\mathrm{R}e^{\omega t} + \mathrm{S}e^{-\omega t}),$$

où nous désignons par $\omega$ l'une des valeurs de $\sqrt{-\rho}$, et par R et S des constantes qui dépendent du déplacement initial du système. Si R n'est pas nul, le terme ci-dessus finira par croître indéfiniment avec $t$. Ainsi, à moins qu'on ne suppose le cas tout à fait exceptionnel d'un déplacement initial présentant cette circonstance singulière que tous les coefficients, tels que R, des termes à exposants positifs, soient nuls, on sera certain que les valeurs des variables $p$, $q$, $r$ cesseront d'être très-petites au bout d'un certain temps. Le système tendra donc toujours à s'éloigner davantage de sa position d'équilibre, quel que soit l'ébranlement initial; sauf toutefois le cas unique que nous venons de signaler, et où l'analyse précédente ne permet pas d'affirmer qu'il y ait instabilité.

La question est ramenée à prouver que l'équation en $\rho$ n'a pas de racines réelles et positives; à cet effet, nous allons mettre les équations (4) sous une autre forme: désignons par T ce que devient la demi-somme des forces vives des points du système, c'est-à-dire la fonction $\frac{1}{2}\sum m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)$, quand on y remplace $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ par les valeurs suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = a_1 k + a_2 k' + a_3 k'',$$
$$\frac{dy}{dt} = b_1 k + b_2 k' + b_3 k'',$$
$$\frac{dz}{dt} = c_1 k + c_2 k' + c_3 k'',$$

nous aurons

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}'k^2 + \mathrm{B}'k'^2 + \mathrm{C}'k''^2 + 2\mathrm{D}'kk' + 2\mathrm{E}'kk'' + 2\mathrm{F}'k'k'').$$

Soit encore V ce que devient le polynôme du deuxième ordre de la fonction des forces, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \ldots)$, quand on y remplace $p$, $q$, $r$ respectivement par $k$, $k'$, $k''$, en sorte que

$$\mathrm{V} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{A}k^2 + \mathrm{B}k''^2 + \mathrm{C}k'^2 + 2\mathrm{D}kk' + 2\mathrm{E}kk'' + 2\mathrm{F}k'k'').$$

Il suit des remarques que nous avons faites sur la composition des équations (4), que les coefficients de $\rho$ dans ces équations ne sont autres que les dérivées partielles de T relatives à $k$, $k'$, $k''$, et que les groupes indépendants de $\rho$ ne sont autres que les dérivées partielles de V relatives aux mêmes quantités. Les équations (4) peuvent donc s'écrire ainsi :

$$\rho\,\frac{dT}{dk} + \frac{dV}{dk} = 0,$$

$$\rho\,\frac{dT}{dk'} + \frac{dV}{dk'} = 0,$$

$$\rho\,\frac{dT}{dk''} + \frac{dV}{dk''} = 0,$$

et si on les ajoute, après les avoir multipliées respectivement par $k$, $k'$, $k''$,..., on aura, vu que T et V sont des fonctions homogènes du deuxième degré,

$$\rho T + V = 0, \quad \text{d'où} \quad \rho = -\frac{V}{T}.$$

Cette formule renferme la démonstration de la proposition énoncée. En effet, remarquons que les valeurs réelles de $\rho$ doivent correspondre à des valeurs réelles de $k$, $k'$, $k''$; et qu'en supposant $k$, $k'$, $k''$ réelles, les fonctions T et V sont essentiellement positives, savoir : la fonction T par sa définition même, puisqu'elle provient d'une somme de carrés de quantités réelles, et la fonction V à cause que $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ est un minimum. Donc les valeurs réelles de $\rho$ sont négatives.

Il nous a suffi, pour établir l'instabilité de l'équilibre, de démontrer que l'équation finale en $\rho$ ne saurait admettre de racines réelles positives.

M. Sturm a soumis les racines de cette équation à une discussion approfondie. Après avoir établi que toutes ces racines sont *réelles et inégales* (ce qu'avait déjà fait Laplace, d'une manière moins simple, dans un chapitre de la *Mécanique céleste*), M. Sturm a fourni le moyen de les séparer, et a fait connaître plusieurs propriétés remarquables qu'elles possèdent. Un extrait seulement de ce Mémoire important a été inséré dans le *Bulletin de Férussac* (octobre 1829).