JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur une propriété générale d'une classe de fonctions

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 327-328.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__327_0>

SUR UNE PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE D'UNE CLASSE DE FONCTIONS;

PAR J. LIOUVILLE.

Soient $x, y, \ldots, z$ des variables, comprises entre certaines limites qui seront celles des intégrales que nous considérerons tout à l'heure; $x', y', \ldots, z'$ des valeurs quelconques de ces variables; l une fonction donnée de $x, y, \ldots, z$, et l' la même fonction de $x', y', \ldots, z'$; enfin soit T une fonction donnée aussi de $x, y, \ldots, z, x', y', \ldots, z'$, symétrique par rapport à ces deux groupes de variables.

S'il existe des fonctions ζ de $x, y, \ldots, z$ (et ζ' de $x', y', \ldots, z'$) satisfaisant à une équation de la forme

$$\text{(A)} \qquad \int\int\ldots\int l'\mathrm{T}\zeta' dx' dy' \ldots dz' = m\zeta,$$

m étant un paramètre constant, spécial pour chaque fonction ζ, ces fonctions jouiront de la propriété fondamentale suivante: soient deux d'entre elles ζ, ζ_1, répondant à deux paramètres différents m, m_1; on aura

$$\text{(B)} \qquad \int\int\ldots\int l\zeta\zeta_1 dx\, dy \ldots dz = 0.$$

Pour s'en convaincre, il suffit de multiplier par $l\zeta_1 dx\, dy \ldots dz$ l'équation (A), puis d'intégrer, ce qui donne au second membre la quantité

$$m\int\int\ldots\int l\zeta\zeta_1 dx\, dy \ldots dz,$$

et au premier une intégrale dont on n'altère pas la valeur en changeant les unes dans les autres les lettres accentuées et les lettres sans accents; or, après ce changement, l'intégrale coïncide avec celle qu'on obtiendrait en cherchant d'une manière semblable la valeur de

$$m_1\int\int\ldots\int l\zeta\zeta_1 dx\, dy \ldots dz.$$

De là résulte immédiatement l'équation (B).

On voit sur-le-champ la conséquence à tirer de la propriété précédente pour le développement des fonctions en séries de la forme $\sum A \zeta$, lorsqu'un tel développement est possible. On en conclut aussi que, quand la fonction donnée l est toujours positive ou toujours négative, les paramètres m ne peuvent pas être imaginaires. D'ailleurs on comprend sans peine qu'au premier membre de l'équation (A) pourraient être substituées des intégrations plus compliquées, ou même des opérations d'un autre genre, sans que notre théorème (modifié convenablement, s'il le faut, dans le sens de ces opérations nouvelles) et la démonstration même cessassent d'avoir lieu; car ce que l'on vient de lire repose essentiellement sur une certaine symétrie qu'il suffit de conserver. Ajoutons qu'il y a des résultats analogues pour des classes d'équations simultanées. Au reste, c'est sur des équations de la forme (B) que reposent, comme on sait, les solutions de la plupart des questions de physique mathématique. Mais en tirant ici ces équations d'une source nouvelle, on agrandit encore le champ des applications dont elles sont susceptibles.