JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

ABEL TRANSON

Note sur les principes de la mécanique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 320-326.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__320_0>

NOTE

SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE;

PAR M. ABEL TRANSON.

Le double objet de la Mécanique est de calculer les forces capables de produire un mouvement connu; et, inversement, déterminer les circonstances du mouvement quand les forces sont données.

Mais si l'on fait attention que les forces n'entrent pas directement dans le calcul, mais seulement leurs mesures, qui sont les secondes dérivées de l'espace exprimé en fonction du temps, on conviendra que le problème de la mécanique pourrait être posé d'une manière plus étendue; c'est-à-dire qu'on pourrait proposer, étant données les lois du mouvement par les relations entre le temps et l'espace parcouru, conclure de ces données les lois qui régissent non pas seulement les vitesses et les forces, c'est-à-dire les premières et secondes dérivées, mais les dérivées troisièmes,... ou d'un ordre quelconque: ou bien, étant données les dérivées troisièmes,... ou supérieures, en conclure inversement les circonstances immédiates du mouvement, comme la vitesse du mobile, la forme de la trajectoire, etc.

Si jusqu'ici, dans le problème de la mécanique, on n'a attaché d'importance qu'aux relations qui impliquent, avec la fonction représentative de l'espace parcouru, ses deux premières dérivées, n'est-ce pas uniquement parce qu'on n'a attaché qu'à ces deux dérivées, première et seconde, une signification concrète ou une notion métaphysique. Cependant, si l'on conçoit la vitesse comme une propriété inhérente au mobile et génératrice de l'espace qu'il parcourt; puis la force comme une entité, extérieure à la matière et génératrice de la vitesse; pourquoi s'arrêterait-on dans cette progression d'idées? pourquoi n'admettrait-on pas une entité consécutive aux précédentes, génératrice de la force et mesurée naturellement par la troisième dérivée; puis une autre, génératrice de la précédente et mesurée par la quatrième dérivée, et ainsi indéfiniment? Et comme la supériorité de la physique des modernes dépend en grande partie de l'application qu'on a faite des relations générales préalablement reconnues entre les espaces, les vitesses et les forces, serait-il déraisonnable d'attendre, de l'étude des relations qui existent naturellement entre ces entités consécutives, des résultats nouveaux et importants pour la science?

L'introduction d'une notion métaphysique nouvelle, ou plutôt d'une infinité de notions de ce genre, serait, je l'avoue, de nature à altérer le caractère de simplicité qui prédomine dans la science moderne.

Quoi qu'il en soit, et sans prendre aucun parti à cet égard, on peut traiter la question à un point de vue purement mathématique. C'est-à-dire que, tout comme indépendamment de la notion de la force, il serait encore de l'essence de la mécanique de rechercher la valeur de la seconde dérivée de l'espace, estimée dans la direction de la normale principale et d'établir ainsi la relation remarquable qui est entre cette valeur et le rayon de courbure; ainsi il peut être utile de rechercher comment les dérivées troisième, quatrième ou supérieures influent sur la forme de la trajectoire.

Je présente ici une première ébauche de ce problème. Me bornant, d'ailleurs, à considérer le mouvement d'un point matériel unique, et dans ce mouvement l'influence des troisièmes dérivées, je ferai voir comment elles déterminent, dans le cas des trajectoires planes, la valeur de la première déviation de courbure [*], et, dans les trajectoires à double courbure, le rayon de la seconde courbure et celui de la sphère osculatrice.

J'appellerai *virtualité* la première dérivée de la force accélératrice, ou troisième dérivée de l'espace parcouru; c'est donc une *théorie des*

---

[*] Pour ce qu'on doit entendre par *déviation de la forme circulaire*, ou *première déviation de courbure*, voir ce Journal, tome VI, 1841, pages 191 et suivantes.

virtualités qu'il y aurait à présenter en regard de la *théorie des forces*. Pour que cette étude fût complète, il faudrait étendre ces considérations au mouvement d'un système quelconque de points matériels. Je préviens le lecteur que je n'entends, d'ailleurs, attacher au mot *virtualité* aucune signification concrète. Je ne l'emploie que pour faciliter les énoncés en abrégeant le discours.

Ainsi, dans le cas du *mouvement rectiligne,* quand l'espace parcouru est exprimé à l'aide du temps par une fonction du troisième degré, je dirai que la virtualité est constante, et réciproquement. Mais si la fonction est quelconque, la virtualité varie à chaque instant; elle a pour mesure la valeur de la force qu'elle engendrerait dans l'unité de temps, si pendant ce temps elle était constante: c'est $\frac{d\varphi}{dt}$, en appelant φ la force accélératrice. La *virtualité motrice* serait $m\frac{d\varphi}{dt}$, en appelant m la masse du mobile.

Dans le cas du *mouvement curviligne,* les virtualités se composent et se décomposent suivant la même loi que les forces et les vitesses, c'est-à-dire par la règle du parallélogramme. Ce même principe s'étend à la composition et à la décomposition des dérivées d'un ordre quelconque; il suppose seulement l'extension corrélative du principe de l'inertie. Il faut dire, par exemple, que l'effet dynamique d'une virtualité sur un corps est indépendant de l'état actuel de ce corps, c'est-à-dire qu'elle engendre toujours dans un temps donné une même force, quelles que soient la direction actuelle du mouvement, la vitesse du mobile et la force qui lui est déjà appliquée. Ce postulatum étant admis, la démonstration de la valeur des virtualités estimées dans une direction quelconque se fait absolument comme pour les forces.

D'après cela, il est manifeste à priori que les deux principaux théorèmes qu'on obtient dans la considération des secondes dérivées, et qui sont relatifs à l'évaluation des deux composantes de la force accélératrice, dont l'une suivant la tangente ou direction de la vitesse, et l'autre dans un sens perpendiculaire, ont leurs analogues ou plutôt leurs identiques dans tous les ordres. C'est ainsi que la virtualité motrice, estimée dans le sens de la force accélératrice φ, est égale à $m\frac{d\varphi}{dt}$; tandis que l'autre composante a pour mesure $m\varphi \frac{d\omega}{dt}$, en appelant $d\omega$ l'angle infinitésimal que font entre elles deux directions consécutives de la force accélératrice.

Ces préliminaires établis, pour obtenir, *dans le cas d'une trajectoire plane*, la tangente de l'angle δ que fait avec la normale la ligne droite, lieu des centres de toutes les coniques qui ont avec cette courbe un contact du second ordre; tangente qui offre, comme je l'ai démontré ailleurs [*], la mesure représentative de la quantité dont le troisième élément infinitésimal s'écarte du cercle osculateur déterminé par les deux premiers, et que j'ai appelée, à cause de cela, *première déviation de courbure;*

Soient ψ la composante normale et τ la composante tangentielle de la virtualité. L'espace parcouru dans le sens de la normale pendant le temps dt sera, en négligeant les termes du quatrième ordre,

$$e = \frac{V^2}{r}\frac{dt^2}{1.2} + \psi\frac{dt^3}{2.3},$$

et, dans le sens de la tangente,

$$l = vdt + \frac{dv}{dt}\frac{dt^2}{1.2} + \tau\frac{dt^3}{1.2.3}.$$

Appelons l' la partie du chemin dans le sens de la tangente jusqu'à la rencontre du cercle osculateur, de sorte que $l' = \sqrt{2er}$; on a, d'après la définition même de la première déviation,

$$l = l' + 2e \tang \delta.$$

Combinant entre elles ces diverses relations, il vient finalement

$$\tang \delta = \frac{r}{2.3}\cdot\frac{3v\frac{dv}{dt} - r\psi}{v^3}:$$

ou bien, en introduisant la force accélératrice normale $F = \frac{V^2}{r}$ et la

[*] Dans le Mémoire déjà cité. *Voyez* le tome VI de ce Journal, pages 192 et 193.

force tangentielle $T = \frac{dv}{dt}$,

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{1}{2.3} \frac{3FT - V\psi}{F^2}.$$

Il est remarquable que la déviation de courbure circulaire ne dépende que de la virtualité normale ψ, sans la virtualité tangentielle τ; de même que la grandeur de la courbure circulaire ne dépend également que de la force accélératrice normale sans la force tangentielle.

Quand la déviation est nulle, c'est-à-dire quand la trajectoire est un cercle, ou seulement lorsqu'elle a un contact du troisième ordre avec le cercle osculateur, on a

$$\operatorname{tang} \delta = 0;$$

et, par suite, la relation de condition

$$3FT - V.\psi = 0.$$

Dans le cas d'une *trajectoire à double courbure*, on a, pour déterminer la sphère osculatrice, les quatre équations

$$\begin{aligned}
&(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2,\\
&(x - \alpha)\, dx + (y - \beta)\, dy + (z - \gamma)\, dz = 0,\\
&(x - \alpha)\, d^2x + (y - \beta)\, d^2y + (z - \gamma)\, d^2z + ds^2 = 0,\\
&(x - \alpha)\, d^3x + (y - \beta)\, d^3y + (z - \gamma)\, d^3z + 3\, ds\, d^2s = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on représente, comme précédemment, la vitesse par V, et la force tangentielle par T, la troisième équation pourra se mettre sous la forme

$$\frac{\alpha - x}{R}\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{\beta - y}{R}\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{\gamma - z}{R}\frac{d^3z}{dt^3} = \frac{3VT}{R}.$$

Or, il est manifeste que le premier membre représente la somme des trois virtualités composantes projetées sur le rayon de la sphère osculatrice, c'est-à-dire la virtualité ψ estimée dans la direction de ce rayon;

on a donc

$$\psi = \frac{3\,\mathrm{VT}}{\mathrm{R}}.$$

D'ailleurs on trouvera facilement, à l'aide de la troisième des quatre équations ci-dessus, que la force accélératrice estimée suivant une ligne qui joindrait l'élément de la trajectoire à un point quelconque de l'axe polaire est égale à $\frac{\mathrm{V}^2}{\rho}$, en appelant ρ la longueur de cette ligne; formule qui donne, en particulier, soit la force centrifuge, dirigée vers le centre du cercle osculateur $f = \frac{\mathrm{V}^2}{r}$, soit la force dirigée vers le centre de la sphère osculatrice $\mathrm{F} = \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{R}}$. De là on pourra tirer cette autre expression :

$$\psi = \frac{3\,\mathrm{FT}}{\mathrm{V}}.$$

D'ailleurs, on doit remarquer de nouveau que le rayon de la sphère osculatrice dépend exclusivement de la virtualité normale à la surface de cette sphère.

Avec la sphère osculatrice, il est indispensable de déterminer le rayon de seconde courbure, pour que la trajectoire soit complétement définie dans son troisième élément. Représentons par W′ la virtualité estimée normalement au plan osculateur; on trouvera comme il suit une relation simple entre W′ et le rayon de la seconde courbure.

Premièrement on a

$$\mathrm{W}' = \frac{(dz\,d^2y - dy\,d^2z)\frac{d^3x}{dt^3} + (dy\,d^2x - dx\,d^2y)\frac{d^3y}{dt^3} + (dz\,d^2y - dy\,d^2x)\frac{d^3z}{dt^3}}{\mathrm{M}};$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{M} = \sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2};$$

l'expression de W′ se mettra sans difficulté sous la forme

$$\mathrm{W}' = \frac{dx\,(d^2y\,d^3z - d^2x\,d^3y) + dy\,(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z) + dz\,(d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x)}{\mathrm{M}^2}\cdot\frac{1}{dt^3}\cdot\mathrm{M}.$$

Or, le premier facteur de cette expression est précisément l'inverse du rayon de seconde courbure ou $\frac{1}{r'}$, et il est facile de voir que la quantité $\frac{1}{dt^3}$ M est égale à Vf, en appelant f la force dirigée suivant la normale principale ou force centrifuge; on a donc

$$W' = \frac{Vf}{r'},$$

ou bien, en mettant pour f sa valeur $\frac{V^2}{r}$, il viendra définitivement la formule

$$W' = \frac{V^3}{r \cdot r'}.$$