JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Mémoire sur quelques propriétés géométriques relatives aux fonctions elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 297-315.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__297_0>

MÉMOIRE

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES, RELATIVES AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Un savant géomètre, M. Gudermann, qui est l'auteur de plusieurs Mémoires intéressants publiés dans le Journal de M. Crelle, a considéré, parmi d'autres questions, la rectification de la sphéro-conique, courbe produite par l'intersection d'un cône du second ordre avec une sphère, dont le centre est le sommet du cône. Il résulte de l'analyse de ce savant, qu'on peut toujours représenter une fonction elliptique de troisième espèce par un arc de cette courbe, si le paramètre est circulaire; mais il ne paraît avoir donné aucune représentation de la fonction Π logarithmique, ce qu'il regarde comme une question un peu difficile. Voici ses paroles : « In applicationibus analyseos » ad geometriam, imprimis sphericam et dynamicam, rarissime inci- » dimus in integrale quod sit naturæ hyperbolicæ, frequentissime vero » incidimus in integralia quæ sunt cyclicæ. » (Journal de M. Crelle, tome XIV, page 169.) Quelques années après les recherches de M. Gudermann, j'ai démontré, dans ce Journal, qu'on pouvait représenter toute fonction elliptique (au moins avec l'aide des transformations modulaires dues à Lagrange et à M. Jacobi) par les arcs de la courbe tracée sur une surface sphérique par un cône du second ordre, dont le sommet est situé sur la surface, et dont un des axes principaux extérieurs passe par le centre. Je me propose, dans ce Mémoire, de réunir ces différents résultats, et de faire voir qu'on peut exprimer l'arc de l'intersection d'une sphère avec un cône du second ordre, dont un des axes principaux passe par le centre, quelle que soit la position de son sommet, par les fonctions elliptiques. J'ajouterai aussi quelques généralisations des propriétés de la lemniscate, qui, dans les recherches de ce genre, mérite d'être étudiée avec attention.

Remarquons d'abord qu'il ne sera nécessaire de considérer que le cas où le sommet du cône est dans l'intérieur de la sphère, ce qui, sans diminuer la généralité du problème, simplifiera beaucoup la discussion de l'intégrale résultante.

Car, soit

$$Ax^2 + By^2 + (z - z')^2 = 0$$

l'équation d'un cône qui coupe la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

dont nous prenons le rayon pour unité; on verra sans difficulté que la courbe d'intersection de ces deux surfaces sera située aussi sur le cône dont l'équation est

$$A'x^2 + B'y^2 + \left(z - \frac{1}{z'}\right)^2 = 0,$$

où

$$A' = \frac{A + z'^2 - 1}{z'^2}; \quad B' = \frac{B + z'^2 - 1}{z'^2}.$$

Cela posé, soient α et β les compléments des demi-angles principaux du cône, et z' la distance de son sommet au centre de la sphère; on aura pour l'équation de cette surface, en supposant que l'axe intérieur passe par le centre,

$$x^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + y^2 \operatorname{tang}^2 \beta - (z - z')^2 = 0:$$

substituant pour x, y, z leurs valeurs en ρ et ω, coordonnées polaires de la sphère, on trouve pour l'équation de l'intersection

$$(a) \qquad \frac{\text{séc}^2 \alpha \cos^2 \omega + \text{séc}^2 \beta \sin^2 \omega}{1 + z'^2} \sin^2 \rho + \frac{2z'}{1 + z'^2} \cos \rho = 1,$$

l'origine étant le point où l'axe des z perce la sphère, et l'angle ω étant compté à partir du grand cercle situé dans le plan des xz.

Si l'axe du cône qui passe par le centre est un des extérieurs, l'équation de cette surface sera

$$x^2 - y^2 \operatorname{tang}^2 \beta - (z - z')^2 \operatorname{tang}^2 \alpha = 0,$$

et celle de la courbe d'intersection

$$(b) \qquad \frac{\operatorname{séc}^2 \alpha - \operatorname{séc}^2 \beta \sin^2 \omega}{(1 + z'^2) \operatorname{tang}^2 \alpha} \sin^2 \rho + \frac{2z'}{1 + z'^2} \cos \rho = 1.$$

Les équations (a) et (b) sont toutes deux comprises dans la forme plus générale

$$(c) \qquad \Omega \sin^2 \rho + \sin 2\theta \cos \rho = 1,$$

où Ω désigne une fonction quelconque de ω, et θ une constante. Nous considérerons d'abord cette équation plus générale, à cause qu'il existe pour toutes les courbes qu'elle représente une formule de rectification très-simple.

La différentiation donne

$$\sin^2 \rho = \frac{4\Omega^2 - 4\Omega + \sin^2 2\theta}{\Omega'^2} \frac{d\rho^2}{d\omega^2},$$

en désignant par Ω' la fonction dérivée de Ω. Donc, s étant l'arc, si l'on substitue dans l'équation connue

$$ds = \sqrt{\sin^2 \rho + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}}\, d\omega,$$

on aura

$$ds = \sqrt{\frac{4\Omega^2 + \Omega'^2 - 4\Omega + \sin^2 2\theta}{4\Omega^2 - 4\Omega + \sin^2 2\theta}} \sin \rho\, d\omega.$$

Mais on a, par l'équation (c),

$$\sin \rho = \frac{\cos \theta \sqrt{\Omega - \sin^2 \theta} \pm \sin \theta \sqrt{\Omega - \cos^2 \theta}}{2\Omega},$$

et identiquement,

$$4\Omega^2 - 4\Omega + \sin^2 2\theta = 4(\Omega - \sin^2 \theta)(\Omega - \cos^2 \theta);$$

donc

$$ds = \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{\Omega - \cos^2 \theta}} \pm \frac{\sin \theta}{\sqrt{\Omega - \sin^2 \theta}} \right) \frac{\sqrt{4\Omega^2 + \Omega'^2 - 4\Omega + \sin^2 2\theta}}{2\Omega}\, d\omega.$$

Ainsi, en désignant par s_1, s_2 les arcs que l'arc vecteur, correspondant à l'angle polaire ω, détermine sur la courbe, on aura

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \cos\theta \int \sqrt{\frac{4\Omega^2 + \Omega'^2 - 4\Omega + \sin^2 2\theta}{\Omega - \cos^2\theta}}\,\frac{d\omega}{\Omega},\\ s_1 - s_2 &= \sin\theta \int \sqrt{\frac{4\Omega^2 + \Omega'^2 - 4\Omega + \sin^2 2\theta}{\Omega - \sin^2\theta}}\,\frac{d\omega}{\Omega}.\end{aligned}\right.$$

Faisons maintenant l'application de ces formules aux courbes dont nous nous occupons. Si l'on met pour Ω sa valeur tirée de l'équation (a), on trouvera, à cause de $z' = \operatorname{tang}\theta$,

$$d(s_1 + s_2) = \frac{2}{\sqrt{1+z'^2}}\,\frac{1}{\operatorname{séc}^2\alpha\cos^2\omega + \operatorname{séc}^2\beta\sin^2\omega}\sqrt{\frac{p + q\operatorname{tang}^2\omega}{p' + q'\operatorname{tang}^2\omega}}\,d\omega,$$

en faisant, pour abréger,

$$p = \frac{(\operatorname{séc}^2\alpha - z'^2)\operatorname{tang}^2\alpha}{(1+z'^2)^2},\qquad q = \frac{(\operatorname{séc}^2\beta - z'^2)\operatorname{tang}^2\beta}{(1+z'^2)^2},$$

$$p' = \frac{\operatorname{tang}^2\alpha}{1+z'^2},\qquad q' = \frac{\operatorname{tang}^2\beta}{1+z'^2}.$$

Pour la réduction de cette différentielle, il faudra prendre un angle φ, tel que

$$\sqrt{q}\operatorname{tang}\omega = \sqrt{p}\operatorname{cotang}\varphi,$$

ce qui donnera

$$d(s_1 + s_2) = -\frac{\sin 2\beta(\operatorname{séc}^2\beta - z'^2)}{\operatorname{tang}\alpha\sqrt{\operatorname{séc}^2\alpha - z'^2}}\,\frac{1}{1 + n\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

où

$$n = -1 + \frac{\operatorname{tang}^2\beta - z'^2\sin^2\beta}{\operatorname{tang}^2\alpha - z'^2\sin^2\alpha},\qquad k^2 = \frac{\operatorname{tang}^2\alpha - \operatorname{tang}^2\beta}{\operatorname{séc}^2\alpha - z'^2}.$$

Donc, si l'on compte s_1 et s_2 du grand cercle qui est perpendiculaire à celui duquel on a mesuré l'angle ω, on aura, en employant la notation des fonctions elliptiques,

$$s_1 + s_2 = \frac{\sin 2\beta(\operatorname{séc}^2\beta - z'^2)}{\operatorname{tang}\alpha\sqrt{\operatorname{séc}^2\alpha - z'^2}}\,\Pi(n, k, \varphi).$$

On trouvera de même, pour la différence des arcs,

$$d(s_1 - s_2) = \frac{2z'}{\sqrt{1+z'^2}}\,\frac{1}{\operatorname{séc}^2\alpha\cos^2\omega + \operatorname{séc}^2\beta\sin^2\omega}\sqrt{\frac{p + q\operatorname{tang}^2\omega}{p_1 + q_1\operatorname{tang}^2\omega}}\,d\omega,$$

les quantités p, q ayant les mêmes valeurs que dans la somme, et p_1, q_1 étant respectivement égales à $\frac{\text{séc}^2\alpha - z'^2}{1+z'^2}$ et $\frac{\text{séc}^2\beta - z'^2}{1+z'^2}$. Substituant pour ω sa valeur en φ, et faisant les réductions convenables, on aura

$$s_1 - s_2 = \frac{2z'\sin^2\beta}{\tang\alpha}\sqrt{\frac{\text{séc}^2\beta - z'^2}{\text{séc}^2\alpha - z'^2}}\,\Pi(n, k_1, \varphi),$$

équation dans laquelle le paramètre n est le même que dans la somme, et où $k_1^2 = \frac{\tang^2\alpha - \tang^2\beta}{\tang^2\alpha}$.

Il est évident qu'en supposant $\alpha > \beta$, les quantités k et k_1 seront plus petites que l'unité. Donc, un grand cercle passant par les centres des branches opposées de la courbe déterminera sur elles deux arcs dont la somme et la différence seront exprimables par les fonctions elliptiques de troisième espèce, dont les amplitudes et paramètres sont les mêmes, mais dont les modules sont différents. Le paramètre sera toujours de l'espèce circulaire. Les périmètres entiers des deux branches seront respectivement

$$\frac{2\sin 2\beta(\text{séc}^2\beta - z'^2)}{\tang\alpha\sqrt{\text{séc}^2\alpha - z'^2}}\,\Pi(n, k) + \frac{4z'\sin^2\beta}{\tang\alpha}\sqrt{\frac{\text{séc}^2\beta - z'^2}{\text{séc}^2\alpha - z'^2}}\,\Pi(n, k_1),$$

et

$$\frac{2\sin 2\beta(\text{séc}^2\beta - z'^2)}{\tang\alpha\sqrt{\text{séc}^2\alpha - z'^2}}\,\Pi(n, k) - \frac{4z'\sin^2\beta}{\tang\alpha}\sqrt{\frac{\text{séc}^2\beta - z'^2}{\text{séc}^2\alpha - z'^2}}\,\Pi(n, k_1),$$

et, par conséquent, pourront s'exprimer par des fonctions de la première et de la seconde espèce. (*Traité des fonctions elliptiques,* tome I, chap. 23.)

Si l'on pose $z' = 0$, on retombe sur le cas de l'ellipse sphérique, dans lequel les deux arcs sont égaux; si le sommet du cône est sur la surface, $z' = 1$ et le second arc s_2 disparaîtra.

Passons au cas dans lequel un des axes extérieurs du cône est un diamètre de la sphère. Pour cela, il faut substituer dans les équations (d) la valeur de Ω tirée de l'équation (c); il en résultera, pour la somme des arcs,

$$(e)\qquad d(s_1+s_2)=\frac{2\sqrt{1+z'^2}\tang^2\alpha}{\operatorname{séc}^2\alpha\cos^2\omega+(\tang^2\alpha-\tang^2\beta)\sin^2\omega}\sqrt{\frac{p+q\tang^2\omega}{p'+q'\tang^2\omega}}\,d\omega\,;$$

où

$$p=\frac{(1-z'^2\sin^2\alpha)\cos^2\alpha}{(1+z'^2)^2\sin^4\alpha},\quad q=\frac{[\tang^2\beta-(1-z'^2)\tang^2\alpha]\tang^2\beta}{(1+z'^2)^2\tang^4\alpha}.$$

$$p'=\frac{1}{(1+z'^2)\tang^2\alpha},\qquad q'=\frac{-\tang^2\beta}{(1+z'^2)\tang^2\alpha}.$$

Soit d'abord la quantité q positive, c'est-à-dire soit

$$\tang\beta>\sqrt{1-z'^2}\tang\alpha,$$

et faisons

$$\sqrt{q}\tang\omega=\sqrt{p}\tang t,$$

ce qui donne

$$d(s_1+s_2)=\frac{2p\sqrt{1+z'^2}\sin^2\alpha}{\sqrt{qp'}}\;\frac{1}{1+\left[\dfrac{p(\tang^2\alpha-\tang^2\beta)}{q\operatorname{séc}^2\alpha}-1\right]\sin^2 t}\;\frac{dt}{\sqrt{1-\dfrac{qp'-pq'}{qp'}\sin^2 t}}$$

Puisque la quantité $\dfrac{qp'-pq'}{qp'}$ est plus grande que l'unité, il faudra employer une seconde transformation, en introduisant un nouvel angle φ, tel que

$$\sqrt{qp'-pq'}\sin t=\sqrt{qp'}\sin\varphi\,;$$

alors, après quelques réductions, on obtient

$$s_1+s_2=\frac{2\tang\alpha\cos\beta(1-z'^2\sin^2\alpha)}{\tang\beta}\,\Pi(n,k,\varphi),$$

où

$$n=-1+(1-z'^2\sin^2\alpha)\frac{\tang^2\alpha}{\tang^2\beta},$$

et

$$k^2=\sin^2\beta-(1-z'^2)\tang^2\alpha\cos^2\beta.$$

On a aussi

$$(f)\qquad d(s_1-s_2)=\frac{2z'\sqrt{1+z'^2}\tang^2\alpha}{\operatorname{séc}^2\alpha-\operatorname{séc}^2\beta\sin^2\omega}\sqrt{\frac{p+q\tang^2\omega}{p_1+q_1\tang^2\omega}}\,d\omega,$$

où p et q ont les mêmes valeurs que dans l'expression pour $s_1 + s_2$, et où

$$p_1 = \frac{1 - z'^2 \sin^2\alpha}{(1 + z'^2)\sin^2\alpha}, \qquad q_1 = -\frac{\tang^2\beta - (1 - z'^2)\tang^2\alpha}{(1 + z'^2)\tang^2\alpha}.$$

Posant

$$\sqrt{p}\,\tang\omega = \sqrt{q}\,\tang t,$$

et ensuite

$$\sin t = \sin\beta \sin\psi,$$

on obtiendra enfin

$$s_1 - s_2 = 2z' \sin\alpha \cos\beta \sqrt{\frac{1 - z'^2 \sin^2\alpha}{\tang^2\beta - (1 - z'^2)\tang^2\alpha}}\, \Pi(n_1, \sin\beta, \psi),$$

où

$$n_1 = \frac{\tang^2\alpha - \tang^2\beta - z'^2 \sin^2\alpha \tang^2\alpha}{\tang^2\beta - (1 - z'^2)\tang^2\alpha}.$$

La courbe, dans le cas qu'on vient de considérer, est composée de deux branches fermées égales entre elles, et l'angle 2β est le supplément de celui que forment les tangentes menées du centre, comme on peut aisément s'en assurer en se rappelant l'équation (b). Les deux arcs s_1, s_2 sont situés sur la même branche, et on les détermine par un grand cercle, issu du centre, qui la coupe en deux points.

La plus grande valeur de ω, $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, répond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ce qui montre que le périmètre entier s'exprimera à l'aide de la fonction complète. La plus grande valeur de ψ est arc $\left(\cos = \sqrt{1 - z'^2}\,\frac{\tang\alpha}{\tang\beta}\right)$.

La fonction Π se réduira à une fonction de la première espèce, dans les expressions pour la somme et la différence des arcs, pourvu qu'on ait

$$z'^2 = \frac{\tang^2\alpha - \tang^2\beta}{\sin^2\alpha \tang^2\alpha}.$$

Lorsque cette relation existe, la courbe jouit d'une propriété remarquable, savoir, elle est le lieu géométrique du sommet d'un triangle sphérique, dont la base est donnée, et où le produit des sinus des demi-côtés est constant et plus petit que le carré du sinus de la quatrième partie de la base.

En effet, soit $2c$ la base d'un triangle sphérique, dont les côtés a, b satisfont à la condition dont il s'agit; on aura, λ étant un angle constant,

$$(1 - \cos a)(1 - \cos b) = (1 - \cos c)^2 \sin^2 \lambda.$$

Si l'on exprime $\cos a + \cos b$ et $\cos a \cos b$ par les coordonnées polaires dont l'origine est le milieu de la base, on obtient, pour l'équation du lieu cherché,

$$\frac{1 - \sin^2 c \sin^2 \omega}{2\cos c + 4 \sin^2 \frac{1}{2} c \cos^2 \lambda} \sin^2 \rho + \frac{\cos c}{\cos c + 2 \sin^2 \frac{1}{2} c \cos^2 \lambda} \cos \rho = 1.$$

La forme de cette équation coïncide évidemment avec celle de l'équation (b), et si on les identifie entre elles, on en déduira les équations suivantes :

$$(1 + z'^2) \sin^2 \alpha = 2 \cos c + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} c \cos^2 \lambda,$$
$$(1 + z'^2) \operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \beta \sin^2 c = 2 \cos c + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} c \cos^2 \lambda,$$
$$z' + \frac{1}{z'} = \frac{2 \cos c + 4 \sin^2 \frac{1}{2} c \cos^2 \lambda}{\cos c}.$$

Des deux premières on tire

$$\cos \alpha = \sin c \cos \beta,$$

et de la première et de la troisième,

$$z' \sin^2 \alpha = \cos c;$$

donc, en éliminant c, il résulte

$$z'^2 = \frac{\operatorname{tang}^2 \alpha - \operatorname{tang}^2 \beta}{\sin^2 \alpha \operatorname{tang}^2 \alpha},$$

ce qu'il fallait démontrer. On parvient ainsi, dans la géométrie de la sphère, à un résultat qui a une frappante analogie avec le beau théorème de M. Alfred Serret, sur la rectification de l'ellipse de Cassini, qu'il a publié dans le tome VIII de ce Journal, page 145.

Il suit de la propriété bien connue des fonctions F, que l'arc par lequel le demi-périmètre excède la somme des arcs s_1 et s_2, représente la fonction qui est complémentaire à celle qui exprime la valeur de $s_1 + s_2$.

La courbe générale (b) en comprend une autre qui jouit d'une propriété analogue, savoir, d'être le lieu géométrique du sommet d'un triangle sphérique dont la base est donnée, et où le produit des tangentes des demi-côtés est constant et plus petit que le carré de la quatrième partie de la base.

L'équation de ce lieu s'obtient sans aucune difficulté, et l'on peut l'identifier avec (b), pourvu qu'il existe entre les angles principaux du cône et la distance de son sommet au centre de la sphère, la relation suivante :

$$z'^2 = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha \sin^2\beta}{\sin^2\alpha \cos^2\beta}.$$

Substituant cette valeur de z' dans le module de la fonction par laquelle la somme des arcs s_1 et s_2 s'exprime, on pourra voir qu'il se réduit simplement à $\cos\beta$. Donc, dans le cas dont il s'agit, les fonctions elliptiques qui expriment respectivement la somme et la différence des arcs s_1 et s_2, auront des modules complémentaires : le plus grand appartient à la différence, et le plus petit à la somme ; ce qui est encore analogue à une autre partie du théorème de M. Serret.

Lorsque le cône est de révolution, on a $\alpha = \beta$, et le paramètre, dans les deux fonctions qui expriment la somme et la différence des arcs, devient égal au carré négatif du module; par conséquent, ces fonctions seront réductibles aux transcendantes de la seconde espèce.

L'expression pour la somme des arcs sera, dans ce cas,

$$s_1 + s_2 = 2\cos\beta\left[\mathrm{E}(z'\sin\beta, \varphi) - \frac{z'^2\sin^2\beta\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - z'^2\sin^2\beta\sin^2\varphi}}\right],$$

et, pour la différence,

$$s_1 - s_2 = 2\sqrt{1 - z'^2\sin^2\beta}\left[\mathrm{E}(\sin\beta, \psi) - \frac{\sin^2\beta\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\psi}}\right].$$

On déduit aisément, de la formule bien connue pour la comparaison des fonctions E, que l'arc par lequel le demi-paramètre excède la somme de s_1 et s_2 aura pour valeur $2\cos\beta\,\mathrm{E}(z'\sin\beta, \varphi_1)$, φ_1 étant donné en φ par la relation

$$(1 - z'^2\sin^2\beta)\tang\varphi\tang\varphi_1 = 1.$$

Il nous reste à examiner le cas où q est négatif, c'est-à dire où

$$\tang \beta < \sqrt{1 - z'^2} \tang \alpha.$$

Faisant alors, dans l'équation (e),

$$\sqrt{-q} \tang \omega = \sqrt{p} \sin t,$$

et ensuite

$$\sqrt{-pq'} \sin t = \sqrt{-qp'} \sin \varphi,$$

on obtient finalement, après les réductions nécessaires,

$$s_1 + s_2 = \frac{2 \sin \alpha}{\tang \beta} \sqrt{1 - z'^2 \sin^2 \alpha} \int \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{1 + n \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

où

$$n = -1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}, \quad k^2 = \frac{(1 - z'^2) \tang^2 \alpha - \tang^2 \beta}{(1 - z^2) \tang^2 \alpha + 1}.$$

Pour la différence des arcs, faisons, dans l'équation (f),

$$\sqrt{q_1} \tang \omega = \sqrt{p_1} \tang \psi,$$

il en résultera

$$s_1 - s_2 = 2z' \sin \alpha \sqrt{\frac{1 - z'^2 \sin^2 \alpha}{(1 - z'^2) \tang^2 \alpha - \tang^2 \beta}} \int \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \beta \sin^2 \psi}}{1 + n_1 \sin^2 \psi} d\psi,$$

où

$$n_1 = \frac{z'^2 \sin^2 \alpha \operatorname{séc}^2 \beta}{(1 - z'^2) \tang^2 \alpha - \tang^2 \beta}.$$

Dans le cas où $q = 0$, c'est-à-dire où

$$\tang \beta = \sqrt{1 - z'^2} \tang \alpha,$$

les arcs ne dépendront que des fonctions circulaires, comme on pourra le voir en se rappelant les équations (e) et (f).

M. Gudermann a démontré que l'aire sectorielle d'une ellipse sphérique s'exprime par une fonction elliptique de troisième espèce à paramètre circulaire ; nous allons faire voir que l'aire de l'intersection d'un cône du second ordre avec une sphère, dans le cas le plus général qu'on vient de considérer, ne dépendra que de transcendantes elliptiques.

Pour cela, il faut se rappeler la formule connue pour la différentielle de l'aire A d'une courbe sphérique en coordonnées polaires, savoir,

$$dA = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\rho \, d\omega.$$

Substituant pour ρ sa valeur tirée de l'équation (c), on trouve, pour l'aire indéfinie,

$$A = \omega - \tfrac{1}{2}\int \frac{\sin 2\theta \pm \sqrt{4\Omega^2 - 4\Omega + \sin^2 2\theta}}{\Omega}\, d\omega.$$

Mais, dans le cas dont il s'agit, Ω est une fonction linéaire de $\cos 2\omega$, et si l'on fait $\cos 2\omega = u$, on aura une expression pour A du type suivant :

$$A = \tfrac{1}{2}\operatorname{arc}(\cos = u) + \int \frac{\sin 2\theta \pm \sqrt{a + bu + cu^2}}{e + fu}\,\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

a, b,... étant des coefficients constants. Cette expression est évidemment réductible aux fonctions elliptiques.

Le cas particulier de notre courbe où le sommet du cône est situé sur la surface de la sphère (dont j'ai discuté la rectification avec quelques détails dans le tome IX de ce Journal) est lié, par des relations intimes, avec l'ellipse sphérique. C'est ce que je vais montrer par les considérations suivantes.

Prenons le centre de la sphère pour le sommet d'un cône semblable au cône donné et semblablement placé; la sphéro-conique produite aura un centre verticalement opposé au sommet du cône donné, et elle divisera en parties égales les arcs des grands cercles qu'on mène de ce centre à notre courbe. Cette dernière, regardée sous ce point de vue, fournit une analogie remarquable avec l'expression de l'aire totale de l'ellipse plane, et qu'on ne trouve pas dans le cas de l'ellipse sphérique. En effet, l'équation d'une ellipse sphérique, dont les axes sont α et β, étant

$$\frac{1}{\sin^2\rho} = \frac{\cos^2\omega}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha} + \frac{\sin^2\omega}{\sin^2\frac{1}{2}\beta},$$

celle de notre courbe sera

$$\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\rho} = \frac{\cos^2\omega}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha} + \frac{\sin^2\omega}{\sin^2\frac{1}{2}\beta},$$

d'où l'on déduit, pour la valeur de l'aire comprise entre α et un grand cercle qui fait l'angle ω avec α,

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\sin^2\frac{1}{2}\beta\cos^2\omega - \sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\omega}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\omega + \sin^2\frac{1}{2}\beta\cos^2\omega}\right).$$

Faisant $\omega = \frac{1}{2}\pi$, et multipliant par 4, on trouve, pour l'aire sphérique entière que la courbe comprend,

$$4\pi \sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta.$$

Il existe un autre procédé pour dériver la même courbe d'une sphéro-conique, lequel indique une analogie entre elle et le lieu géométrique des projections orthogonales du centre d'une section conique sur les tangentes.

Pour le faire voir, il est seulement nécessaire de rappeler les expressions pour un arc perpendiculaire, abaissé du centre d'une sphéro-conique sur un grand cercle tangent, qu'on doit aux géomètres qui ont traité des propriétés de cette courbe. En effet, soient α et β les demi-axes d'une ellipse sphérique, et ϖ un arc abaissé du centre perpendiculairement sur une tangente, et faisant un angle ω avec α, on aura

$$\operatorname{tang}^2\varpi = \operatorname{tang}^2\alpha\cos^2\omega + \operatorname{tang}^2\beta\sin^2\omega.$$

Mais si l'on regarde la sphéro-conique comme une hyperbole, il faudra la rapporter à la projection de l'un des axes extérieurs sur la sphère comme à son centre. Si donc on considère un arc perpendiculaire à une tangente, mené du centre extérieur qui est situé sur le prolongement de α, sa valeur sera donnée par l'équation

$$\operatorname{tang}^2\varpi = \operatorname{cotang}^2\alpha\cos^2\omega - \operatorname{cotang}^2\alpha\operatorname{tang}^2\beta\sin^2\omega\ [*].$$

---

[*] La démonstration de ces formules s'effectue sans difficulté.

Pour la première, soit l'équation du cône, qui donne la sphéro-conique,

$$x^2\operatorname{cotang}^2\alpha + y^2\operatorname{cotang}^2\beta - z^2 = 0;$$

celles d'un plan tangent quelconque, et d'un plan perpendiculaire passant par l'axe des z, seront respectivement

$$xx'\operatorname{cotang}^2\alpha + yy'\operatorname{cotang}^2\beta - zz' = 0,$$

Maintenant si, dans les équations (a) et (b), on pose $z' = 1$, il est aisé de voir qu'elles prendront respectivement les deux formes

$$(g)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\rho = \operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \omega + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \omega, \\ \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\rho = \operatorname{cotang}^2 \alpha \cos^2 \omega - \operatorname{cotang}^2 \alpha \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \omega. \end{cases}$$

On conclut donc que les courbes représentées par ces équations sont les lieux géométriques des points situés sur les grands cercles, menés du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole sphérique perpendiculairement aux tangentes, de telle manière que leurs distances au centre soient divisées en parties égales par les tangentes.

On peut démontrer ce résultat par une méthode très-simple, déduite

---

et

$$yx' \operatorname{cotang}^2 \alpha - xy' \operatorname{cotang}^2 \beta = 0.$$

Donc, en désignant par λ, μ, ν les angles que la droite, représentée par ce système d'équations, fait avec les axes des x, y, z, on aura

$$x' \operatorname{cotang}^2 \alpha \cos \lambda + y' \operatorname{cotang}^2 \beta \cos \mu - z' \cos \nu = 0,$$
$$x' \operatorname{cotang}^2 \alpha \cos \mu - y' \operatorname{cotang}^2 \beta \cos \lambda = 0.$$

Tirant les valeurs de $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$, et substituant dans l'équation

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1,$$

on obtient

$$\operatorname{tang}^2 \nu = \frac{x'^2 \operatorname{cotang}^2 \alpha + y'^2 \operatorname{cotang}^2 \beta}{x'^2 \operatorname{cotang}^4 \alpha + y'^2 \operatorname{cotang}^4 \beta}.$$

Mais, en appelant ω l'angle que fait le plan des xz avec celui qui contient l'axe des z et la droite dont nous avons parlé, on a

$$\sin^2 \omega = \frac{y'^2 \operatorname{cotang}^4 \beta}{x'^2 \operatorname{cotang}^4 \alpha + y'^2 \operatorname{cotang}^4 \beta},$$
$$\cos^2 \omega = \frac{x'^2 \operatorname{cotang}^4 \alpha}{x'^2 \operatorname{cotang}^4 \alpha + y'^2 \operatorname{cotang}^4 \beta};$$

de là l'équation

$$\operatorname{tang}^2 \nu = \operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \omega + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \omega,$$

qui est identique avec la formule du texte, l'angle ν étant mesuré par l'arc ϖ. L'expression, dans le cas hyperbolique, peut être prouvée de la même manière.

de la propriété des cônes réciproques qu'on doit à M. Chasles. En effet, soit une surface conique construite en abaissant des droites perpendiculairement du centre de la sphère sur les plans tangents au cône qui a son sommet S sur la surface; ce cône nouveau sera du second ordre et réciproque à celui que nous avons donné, c'est-à-dire que ses plans tangents couperont les arêtes du cône donné à angles droits, et la sphéro-conique qu'il produit aura le point S pour un de ses centres. Si donc on abaisse de ce centre les arcs perpendiculaires sur les tangentes à ladite conique, et si on les prolonge jusqu'à la rencontre de notre courbe, on verra qu'ils sont divisés en parties égales par les tangentes, ce qu'il fallait démontrer.

Il est à propos de remarquer ici deux variétés de la sphéro-conique, qui ont beaucoup d'analogie avec l'hyperbole équilatère. La première a lieu quand il existe entre les demi-axes la relation

$$\sin\alpha = \operatorname{tang}\beta;$$

son équation, par rapport au centre hyperbolique situé sur le prolongement de α, est

$$\frac{1}{\operatorname{tang}^2\rho} = \frac{\cos^2\omega}{\operatorname{tang}^2 a} - \frac{\sin^2\omega}{\sin^2 a},$$

où

$$a = \tfrac{1}{2}\pi - \alpha$$

et est analogue au demi-axe réel de l'hyperbole. Cette courbe jouit des propriétés suivantes :

1°. Soit ϖ l'arc du centre perpendiculaire à la tangente à l'extrémité d'un arc vecteur quelconque ρ, on aura

$$\sin\varpi \operatorname{tang}\rho = \sin a \operatorname{tang} a.$$

2°. Si l'on mène des arcs de grands cercles des foyers conjugués des branches opposées à un point quelconque pris sur la courbe, le produit des tangentes trigonométriques des demi-arcs sera égal au carré de la tangente du demi-arc tiré du centre à ce point.

3°. Elle est lieu géométrique du sommet d'un triangle sphérique dont la base est donnée, et dont la différence des angles à la base est constante.

4°. La courbe particulière représentée par la seconde des équations (g) qui appartient à cette conique, coïncide avec le lieu géométrique du sommet d'un triangle sphérique, dont la base est donnée, et dont le produit des sinus des demi-côtés est constant et égal au carré du sinus de la quatrième partie de la base; son arc peut s'exprimer par une transcendante elliptique de première espèce.

J'ai déjà considéré cette courbe dans une Lettre adressée à M. Liouville et publiée dans le tome VIII de ce Journal.

On reconnaîtra sans peine les propriétés de l'hyperbole équilatère auxquelles celles-ci sont analogues.

L'autre variété de la sphéro-conique à laquelle j'ai fait allusion, a lieu quand le plus petit axe est égal à $\frac{1}{2}\pi$; son équation, rapportée au centre extérieur sur le prolongement de l'axe le plus grand, est

$$\operatorname{tang}^2 \rho \cos 2\omega = \operatorname{tang}^2 a.$$

Les deux propriétés suivantes, dont jouit cette courbe, paraîtront assez remarquables :

1°. La courbe représentée par la seconde des équations (g) qu'on en tire a pour équation

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\rho = \operatorname{tang}^2 a \cos 2\omega;$$

elle coïncide avec le lieu du sommet d'un triangle sphérique dont la base est donnée, et dont le produit des tangentes des demi-côtés est constant et égal au carré de la tangente de la demi-base. Son arc sera aussi exprimé par une fonction elliptique de troisième espèce, dont le module est $\sin \frac{1}{4}\pi$.

2°. Dans une ellipse sphérique de cette espèce, si l'on mène deux cordes (arcs de grands cercles) par le foyer, mutuellement à angles droits, leur somme sera constante et égale à π.

Donc, si l'on prolonge une des cordes jusqu'à la rencontre de la seconde branche de la conique, la partie comprise entre les deux branches sera égale à l'autre, ce qui a une analogie directe avec une propriété connue de l'hyperbole équilatère.

Le lieu géométrique des projections orthogonales du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole quelconque, sur les tangentes, jouit d'une propriété très-analogue à celle de la lemniscate, qui n'est qu'un cas particulier de l'ellipse de Cassini.

Premièrement, pour l'ellipse, soient a et b les demi-axes de la courbe, et, sur le grand axe, prenons les deux points qui divisent en parties égales les distances entre le centre et les foyers. De ces points, comme centres, décrivons deux cercles égaux avec le rayon $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Si l'on mène d'un point quelconque pris sur le lieu des projections du centre, les tangentes à ces cercles, leur rectangle sera constant et égal au carré de la moitié de la corde qui est commune aux deux cercles.

Pour l'hyperbole, il faut distinguer deux cas, selon que l'axe réel est plus grand ou plus petit que l'axe imaginaire. Dans le premier, décrivons des cercles égaux avec le rayon $\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$ autour des deux points qui divisent en parties égales les distances entre le centre et les foyers. Si l'on mène d'un point quelconque, pris sur le lieu dont il s'agit, les tangentes à ces cercles, leur rectangle sera constant et égal au carré de la tangente menée du centre à l'un d'eux.

Dans l'autre cas, quand $b > a$, décrivons des cercles égaux avec les mêmes points comme centres, le rayon étant $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}$. Si d'un point quelconque pris sur le lieu des projections du centre on mène les droites qui, rencontrant les circonférences de ces cercles, soutendent des angles droits aux centres, leur rectangle sera constant et égal à $\frac{1}{2}b^2$.

Quelques propriétés analogues se présentent, dans la géométrie de la sphère.

Cherchons le lieu d'un point tel, que menant de là les arcs tangents t_1, t_2 à deux petits cercles égaux, le produit $\operatorname{tang}\frac{1}{2}t_1 \operatorname{tang}\frac{1}{2}t_2$ soit constant et égal au carré de la tangente de la quatrième partie de la corde commune si les cercles se coupent, ou, si le contraire a lieu, au carré de la tangente de la moitié de l'arc tangent qu'on mène à l'un d'eux du milieu de la distance des centres. En prenant ce point milieu pour origine des coordonnées polaires, et désignant respectivement par y et δ le rayon des cercles et la moitié de la distance de leurs centres, on trouve, pour l'équation du lieu cherché,

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\rho = \frac{\sin^2\gamma + \sin^2\delta}{\cos^2\gamma + \cos^2\delta}\cos^2\omega + \frac{\sin^2\gamma - \sin^2\delta}{\cos^2\gamma + \cos^2\delta}\sin^2\omega.$$

Le premier des cas dont nous avons parlé répond à $\gamma > \delta$, et la forme de l'équation s'accorde avec celle de la première des équations (g); dans l'autre cas, quand $\gamma < \delta$, elle appartient à la seconde.

On parviendra sans difficulté aux théorèmes semblables en prenant les sinus des demi-arcs au lieu des tangentes.

D'une manière analogue à la précédente, on peut décrire une section conique plane en prenant le lieu d'un point tel, que si de là l'on mène des tangentes à deux cercles donnés (qui peuvent être inégaux), leur somme ou différence sera constante.

Semblablement on peut décrire une sphéro-conique en prenant le lieu d'un point tel, que si de là l'on mène des arcs tangents à deux petits cercles donnés, leur somme ou différence sera constante.

Ce dernier théorème paraît donner une extension à la théorie des droites focales des cônes du second ordre, en substituant pour elles deux cônes de révolution.

Revenons à l'équation générale (c), ou

$$\Omega\sin^2\rho + \sin 2\theta\cos\rho = 1,$$

et l'on verra qu'elle peut être transformée dans

$$\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\rho - 2\Omega\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\rho + \frac{1 - \sin 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = 0.$$

en écrivant simplement Ω dans cette dernière au lieu de $\frac{1-2\Omega}{1+\sin 2\theta}$.

Ceci démontre que le produit des tangentes trigonométriques des demi-arcs vecteurs qui répondent à la même valeur de l'angle polaire sera constant; si donc, dans cette classe de courbes, on détermine quatre points en tirant par l'origine deux arcs vecteurs quelconques, ils seront situés sur la circonférence du même petit cercle.

On tire aussi de là une méthode pour déduire, comme un lieu sphérique, l'intersection symétrique d'une sphère avec un cône du second ordre, de la sphéro-conique.

En effet, si l'on porte sur un arc vecteur central ρ d'une sphéro-conique, une partie ρ_1, comptée du centre et telle que

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\rho \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\rho_1 = \text{constante},$$

l'extrémité de l'arc ρ_1 décrira une courbe formée par l'intersection d'un cône dont un des axes principaux passe par le centre de la sphère.

Considérons la classe des courbes planes dont l'équation

$$r^4 - 2\Omega r^2 + k^4 = 0$$

est analogue à la précédente dans la géométrie sphérique. Elle admet une formule de rectification tout à fait semblable; car si l'on désigne par s_1, s_2 les arcs qui répondent à la même valeur de l'angle polaire ω, on trouvera

$$s_1 + s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{4\Omega^2 + \Omega'^2 - 4k^4}{\Omega - k^2}}\, d\omega,$$

et

$$s_1 - s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{4\Omega^2 + \Omega'^2 - 4k^4}{\Omega + k^2}}\, d\omega.$$

Quand Ω est une fonction linéaire de $\cos 2\omega$, il n'est pas difficile d'apercevoir que chacune de ces expressions est réductible à une intégrale du type

$$\int \sqrt{\frac{p + q \operatorname{tang}^2 \omega}{p' + q' \operatorname{tang}^2 \omega}}\, d\omega,$$

et, par conséquent, à une transcendante elliptique, en général de la troisième espèce. Cette forme de Ω se trouve dans le cas des courbes suivantes :

1°. Le lieu géométrique d'un point tel que si de là l'on mène les tangentes à deux cercles égaux donnés qui ne se coupent pas, leur rectangle soit constant et plus petit que le carré de la tangente menée à un d'eux du milieu de la distance des centres.

2°. Le lieu géométrique d'un point tel que si de là l'on mène des droites qui rencontrent les circonférences de deux cercles égaux donnés, de manière à soutendre des angles droits à leurs centres, leur rectangle soit constant et plus petit que la somme des carrés du rayon des cercles et de la moitié de la distance des centres.

La limite de ces deux lieux, quand les cercles vont s'évanouir, coïncide avec le cas particulier de l'ellipse de Cassini, auquel M. Serret a donné le nom de *lemniscate hyperbolique,* et dans lequel la somme et la différence des arcs sont exprimables par les fonctions de la première espèce.

3°. Le lieu géométrique d'un point tel que si de là l'on mène deux tangentes à une ellipse donnée, l'angle qu'elles font soit constant. Cette courbe se compose de deux branches fermées, concentriques avec l'ellipse, qui satisfont à la condition donnée par les angles supplémentaires.

Il est bon de remarquer que le lieu semblable, pour le cas d'une hyperbole équilatère, coïncidera avec la variété elliptique de la cassinoïde, et ses foyers ou pôles seront situés sur l'axe imaginaire.