JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note de M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 293-296.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__293_0>

Note de M. Liouville.

Les valeurs de x et y pour les courbes de la première classe sont fournies par la formule

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{c(z+a)^{n+1}}{(z-\alpha)(z+\alpha)^n},$$

où c est une constante que nous pouvons supposer réelle; de cette formule on déduit $x - y\sqrt{-1}$ en permutant entre elles dans le second membre les deux constantes imaginaires conjuguées

$$a = g + h\sqrt{-1}, \quad \alpha = g - h\sqrt{-1},$$

qui doivent au surplus satisfaire à l'équation de condition

$$\frac{(a+\alpha)^2}{4a\alpha} = \frac{n}{n+1}, \quad \text{ou} \quad g^2 = nh^2.$$

A cause de cette équation de condition, nous trouverons

$$dx + \sqrt{-1}\,dy = -\frac{c[a+\alpha+n(a-\alpha)](z+a)^n(z-a)\,dz}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^{n+1}}.$$

En permutant entre elles les imaginaires a et α, on aura ensuite

$$dx - \sqrt{-1}\, dy;$$

la multiplication donnera dès lors

$$dx^2 + dy^2 = \frac{C^2 dz^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)},$$

pourvu qu'on pose

$$C^2 = c^2 [(a + \alpha)^2 - n^2 (a - \alpha)^2] = 4n(n + 1) c^2 h^2.$$

Le théorème de M. Serret pour cette classe de courbes est donc vérifié. Mais nos calculs ne demandent pas que n soit entier; cet exposant doit seulement être rationnel, pour que la relation entre x et y demeure algébrique; on peut supposer $n =$ une fraction quelconque $\frac{p}{q}$; il suffit de prendre toujours $g = h\sqrt{n}$ (le signe du radical est indifférent). Voilà donc des fonctions elliptiques de première espèce, exprimables par des arcs de courbes algébriques, le module $k = \sqrt{\frac{p}{p+q}}$ de ces fonctions (ramenées à la forme ordinaire en posant $z = \sqrt{a\alpha}.\tang \frac{1}{2}\theta$) n'étant assujetti qu'à la seule condition d'avoir pour valeur de son carré une fraction proprement dite.

En introduisant des sinus et cosinus, on peut se débarrasser des radicaux que nos formules contiennent quand n est fractionnaire. Soit

$$z + g = \frac{h \cos\varphi}{\sin\varphi};$$

il nous viendra

$$z + a = \frac{h}{\sin\varphi}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

$$z + \alpha = \frac{h}{\sin\varphi}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

et aussi, puisque $g = h\sqrt{n}$,

$$z - \alpha = \frac{h(\cos\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Par conséquent

$$x + y\sqrt{-1} = \frac{c[\cos(2n+1)\varphi + \sqrt{-1}\sin(2n+1)\varphi]}{\cos\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi},$$

d'où, en multipliant les deux termes de la fraction par l'expression imaginaire conjuguée au dénominateur, et décomposant l'équation en deux,

$$x = \frac{c[\cos 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\cos(2n+1)\varphi]}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi},$$

$$y = \frac{c[\sin 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\sin(2n+1)\varphi]}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi}.$$

Quant à la valeur de $dx^2 + dy^2$, elle est

$$\frac{C^2 dz^2}{(z^2 - a^2)(z^2 - \alpha^2)} = \frac{4n(n+1)c^2 d\varphi^2}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi};$$

cette valeur peut d'ailleurs se déduire directement des expressions de x et y, ou plutôt de $x \pm y\sqrt{-1}$, en fonction de φ, ce qui lève tous les scrupules que la présence des radicaux aurait pu faire naître.

L'élément ds de l'arc de courbe est donc égal à l'élément de fonction elliptique

$$\frac{2\sqrt{n(n+1)}.cd\varphi}{\sqrt{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi}},$$

qu'on ramènera du reste, si l'on veut, à la forme ordinaire des fonctions de première espèce, en posant $\cot\varphi = \sqrt{n+1}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\theta + \sqrt{n}$. Il a une relation simple avec le rayon vecteur $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; le produit de $x + y\sqrt{-1}$ par $x - y\sqrt{-1}$ donne, en effet,

$$r^2 = \frac{c^2}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi},$$

et, par suite, $ds = 2\sqrt{n(n+1)}.rd\varphi$.

Je ne m'arrêterai pas à considérer les autres classes de courbes. Bornons-nous à dire que généralement dans les formules de M. Serret on peut supposer le nombre n fractionnaire.

Les représentations ainsi obtenues sont du genre de celles que nous trouvons dans la lemniscate. Il y a véritablement identité entre l'arc de chaque courbe et l'intégrale qui le représente. N'exprimer l'arc, par une intégrale donnée, qu'à une quantité algébrique près, offre beaucoup moins d'intérêt et n'a d'ailleurs aucune difficulté. Il suffit de se rappeler les formules

$$\begin{aligned} x &= \psi'(\theta)\sin\theta + \psi''(\theta)\cos\theta, \\ y &= \psi'(\theta)\cos\theta - \psi''(\theta)\sin\theta, \\ s &= \psi(\theta) + \psi''(\theta), \end{aligned}$$

par lesquelles on résout, comme on sait, l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Soit P une fonction algébrique de $\sin\theta$ et $\cos\theta$; pour que l'arc s appartienne à une courbe algébrique, et soit, à une quantité algébrique près, égal à la transcendante $\int P d\theta$, on n'aura qu'à prendre

$$\psi(\theta) = \int P d\theta, \quad \text{ou} \quad = \int P d\theta + Q,$$

Q désignant une fonction quelconque algébrique aussi. Mais d'une telle formule à celles que M. Serret nous donne, il y a loin, surtout quand il s'agit des fonctions elliptiques de première espèce. C'est principalement dans ce cas qu'il importait en effet d'arriver à des résultats débarrassés de termes complémentaires, afin de pouvoir transporter immédiatement, et dans toute leur élégance, aux arcs de courbes, les propriétés si curieuses de ces fonctions. M. Serret a su atteindre le but proposé, en résolvant en même temps une belle question d'analyse indéterminée; et l'on voit assez combien son travail mérite l'attention des géomètres.