JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Addition au mémoire précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 286-290.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__286_0>

Addition au Mémoire précédent ;

Par M. J.-A. SERRET.

Je me propose, dans cette Note, de former l'équation de la première des courbes de la seconde classe dont il a été question au § XI.

Ainsi qu'on l'a vu dans mon Mémoire, la courbe dont il s'agit pourra être définie par l'équation

$$(1)\qquad (x-\xi)+i(y-\upsilon)=Ce^{\omega i}\frac{(z-b)(z+a)^3}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^2},$$

où $\xi+i\upsilon$ désigne une constante arbitraire, que nous supposerons ici égale à $-Ce^{\omega i}$; on a d'ailleurs, pour déterminer a, α et b,

$$(a^2+\alpha^2)^2=\frac{4}{3},\qquad a\alpha=1,$$

d'où

$$a^2=\frac{1+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\qquad \alpha^2=\frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

et

$$b=a\frac{3a^2+5\alpha^2}{3\alpha^2+5a^2};$$

β désignant la quantité imaginaire conjuguée de b, on aura

$$\beta=\alpha\frac{3\alpha^2+5a^2}{3a^2+5\alpha^2},$$

et l'on trouve aisément

$$b^2=\frac{43-13i\sqrt{2}}{27\sqrt{3}},$$

$$\beta^2=\frac{43+13i\sqrt{2}}{27\sqrt{3}},$$

avec

$$b\beta=1.$$

De l'équation (1) on tire

$$(2)\qquad x + iy = Ce^{\omega i}\frac{(z-b)(z+a)^2 - (z-\alpha)^2(z+\alpha)^2}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^2}.$$

Il est facile de s'assurer que le numérateur du second membre ne renferme que des termes en z^3 et en z, et par conséquent, que $x + iy$ est une fonction *impaire* de z; l'équation (1) ne changera donc pas en changeant les signes des trois variables x, y et z, et l'on aura

$$(3)\qquad (x+\xi) + i(y+\upsilon) = -Ce^{\omega i}\frac{(z+b)(z-a)^2}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^2}.$$

Comme les équations (1) et (3) ne cessent pas d'avoir lieu en changeant i en $-i$, on aura finalement les quatre équations suivantes :

$$(x-\xi) + i(y-\upsilon) = Ce^{\omega i}\frac{(z-b)(z+a)^2}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^2},$$

$$(x-\xi) - i(y-\upsilon) = Ce^{-\omega i}\frac{(z-\beta)(z+\alpha)^2}{(z-a)^2(z+a)^2},$$

$$(x+\xi) + i(y+\upsilon) = -Ce^{\omega i}\frac{(z+b)(z-a)^2}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^2},$$

$$(x+\xi) - i(y+\upsilon) = -Ce^{-\omega i}\frac{(z+\beta)(z-\alpha)^2}{(z-a)^2(z+a)^2};$$

d'où l'on déduit, par la multiplication,

$$(x-\xi)^2 + (y-\upsilon)^2 = C^2\frac{(z-b)(z-\beta)(z+a)(z+\alpha)}{(z-a)^2(z-\alpha)^2},$$

$$(x+\xi)^2 + (y+\upsilon)^2 = C^2\frac{(z+b)(z+\beta)(z-a)(z-\alpha)}{(z+a)^2(z+\alpha)^2}.$$

Les premiers membres des deux équations précédentes représentent les carrés des distances d'un point de la courbe aux deux points fixes (ξ, υ) et $(-\xi, -\upsilon)$, dont la distance est égale à $2C$; en désignant par ρ et ρ' ces deux distances, on aura

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho^2 = C^2\dfrac{(z-b)(z-\beta)(z+a)(z+\alpha)}{(z-a)^2(z-\alpha)^2}, \\[2ex] \rho'^2 = C^2\dfrac{(z+b)(z+\beta)(z-a)(z-\alpha)}{(z+a)^2(z+\alpha)^2}. \end{cases}$$

et l'on obtiendra l'équation de la courbe en ρ et ρ', par l'élimination de z entre ces deux équations; cette élimination, qui au premier abord semble devoir être fort pénible, s'exécute très-simplement en opérant de la manière suivante.

En multipliant entre elles les équations (4), on trouve

$$\rho^2\rho'^2 = C^4\frac{(z^2-b^2)(z^2-\beta^2)}{(z^2-a^2)(z^2-\alpha^2)} = C^4\frac{z^4-(b^2+\beta^2)z^2+b^2\beta^2}{z^4-(a^2+\alpha^2)z^2+a^2\alpha^2},$$

et, en remplaçant a^2, α^2, b^2, β^2 par les valeurs écrites plus haut,

$$\rho^2\rho'^2 = C^4\frac{z^4-\dfrac{86}{27\sqrt{3}}z^2+1}{z^4-\dfrac{2}{\sqrt{3}}z^2+1}. \tag{5}$$

Cela posé, l'équation (2) peut s'écrire de la manière suivante:

$$x+iy = Ce^{\omega i}\frac{(3a-b)z^3+(a^3-3a^2b)z}{(z^2-\alpha^2)^2},$$

et, en changeant partout i en $-i$,

$$x-iy = Ce^{-\omega i}\frac{(3\alpha-\beta)z^3+(\alpha^3-3\alpha^2\beta)z}{(z^2-a^2)^2}.$$

Des deux équations précédentes, on déduit par la multiplication, et en observant que $a\alpha = 1$, $b\beta = 1$,

$$x^2+y^2 = C^2z^2\frac{[10-3(a\beta+\alpha b)]z^4+[6(a^2+\alpha^2)-9(ab+\alpha\beta)-(b\alpha^3+\beta a^3)]z^2+[10-3(a\beta+\alpha b)]}{[z^4-(a^2+\alpha^2)z^2+1]^2};$$

on trouve d'ailleurs aisément

$$a^2+\alpha^2 = \frac{2}{\sqrt{3}},\qquad a\beta+\alpha b = \frac{14}{9},$$

$$ab+\alpha\beta = \frac{10}{3\sqrt{3}},\qquad b\alpha^3+\beta a^3 = \frac{-2}{9\sqrt{3}};$$

on aura donc, en désignant par r le rayon vecteur $\sqrt{x^2+y^2}$,

$$r^2 = \frac{16}{3}C^2\frac{z^2\left(z^4-\dfrac{10}{3\sqrt{3}}z^2+1\right)}{\left(z^4-\dfrac{2}{\sqrt{3}}z^2+1\right)^2}.$$

D'ailleurs, le rayon r est une médiane du triangle dont ρ, ρ' et $2C$ sont les côtés; on aura donc

$$\rho^2 + \rho'^2 = 2r^2 + 2C^2,$$

et, par conséquent,

$$(6) \qquad \rho^2 + \rho'^2 - 2C^2 = \frac{32C^2}{3} \frac{z^2\left(z^4 - \frac{10}{3\sqrt{3}}z^2 + 1\right)}{\left(z^4 - \frac{2}{\sqrt{3}}z^2 + 1\right)^2}.$$

C'est entre les équations (5) et (6) que nous allons maintenant éliminer z.

Si dans ces équations on pose

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = u,$$

elles deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \rho^2\rho'^2 &= C^4 \frac{u - \frac{86}{27\sqrt{3}}}{u - \frac{2}{\sqrt{3}}}, \\ 2r^2 \quad \text{ou} \quad \rho^2 + \rho'^2 - 2C^2 &= \frac{32C^2}{3} \frac{u - \frac{10}{3\sqrt{3}}}{\left(u - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}. \end{aligned}\right.$$

La quantité u entre au premier degré dans la première de ces équations, l'élimination de cette quantité s'effectue immédiatement, et l'on trouve

$$C^6 r^2 = \frac{9\sqrt{3}}{16}(C^4 - \rho^2\rho'^2)(9\rho^2\rho'^2 - C^4),$$

ou

$$(7) \qquad C^6(\rho^2 + \rho'^2 - 2C^2) = \frac{9\sqrt{3}}{8}(C^4 - \rho^2\rho'^2)(9\rho^2\rho'^2 - C^4),$$

ce qui est l'équation de la courbe cherchée entre ses deux coordonnées polaires ρ et ρ', la distance des deux pôles étant représentée par $2C$. On sait que la lemniscate, en adoptant le même genre de coordonnées, est représentée par l'équation

$$\rho\rho' = C^2.$$

Pour avoir l'équation de la courbe en coordonnées polaires ordinaires, il suffira de remplacer, dans l'équation (7), ρ et ρ' par leurs valeurs tirées des équations

$$\rho^2 = r^2 - 2Cr\cos t + C^2,$$
$$\rho'^2 = r^2 + 2Cr\cos t + C^2,$$

d'où l'on déduit

$$\rho^2\rho'^2 = r^4 - 2C^2r^2\cos 2t + C^4;$$

on trouve ainsi

$$9r^2(r^2 - 2C^2\cos 2t)^2 + 8C^4(r^2 - 2C^2\cos 2t) + \frac{16C^6}{9\sqrt{3}} = 0.$$