JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MICHAEL ROBERTS

Note sur deux systèmes généraux de trajectoires orthogonales

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 251-256.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__251_0>

NOTE

SUR DEUX SYSTÈMES GÉNÉRAUX DE TRAJECTOIRES ORTHOGONALES;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

M. Serret, dans un Mémoire inséré au tome VIII de ce Journal (page 498), a déterminé les trajectoires orthogonales des courbes qui jouissent de cette propriété que le produit des distances d'un point quelconque de l'une d'elles aux sommets d'un polygone régulier est constant. Je me propose, dans le présent article, de donner une généralisation et une démonstration du théorème de M. Serret, fondées sur des considérations géométriques. Voici l'énoncé de notre théorème.

Désignons par $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ les distances d'un point O aux sommets $P_1, P_2, \ldots, P_n$ d'un polygone quelconque, et par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ les angles OP_1P_2, $OP_2P_3, \ldots, OP_{n-1}P_n$; je dis que les équations

$$(U) \qquad r_1^\lambda r_2^\mu r_3^\nu \ldots r_n^\varpi = k^{\lambda+\mu+\nu+\ldots+\varpi},$$

$$(U') \qquad \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 + \ldots + \varpi\omega_n = (\lambda + \mu + \ldots + \varpi)\theta,$$

où k et θ sont des paramètres arbitraires, ($\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varpi$ des nombres donnés quelconques), représentent deux systèmes de trajectoires orthogonales.

Soit OO' (∂s) un élément d'une courbe quelconque du premier système (U), on a

$$\begin{aligned} \partial r_1 &= \partial s \cos P_1OO', \\ \partial r_2 &= \partial s \cos P_2OO', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \partial r_n &= \partial s \cos P_nOO'; \end{aligned}$$

d'ailleurs l'équation (U) donne

$$\lambda \frac{\partial r_1}{r_1} + \mu \frac{\partial r_2}{r_2} + \ldots + \varpi \frac{\partial r_n}{r_n} = 0;$$

on aura donc

$$(u)\qquad \lambda\frac{\cos P_1OO'}{r_1}+\mu\frac{\cos P_2OO'}{r_2}+\ldots+\varpi\frac{\cos P_nOO'}{r_n}=0.$$

Soit encore OO'' ($\delta s'$) un élément d'une courbe quelconque du système (U'), on aura

$$\frac{\delta\omega_1}{\delta s'}=\frac{\sin P_1OO''}{r_1},$$
$$\frac{\delta\omega_2}{\delta s'}=\frac{\sin P_2OO''}{r_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\delta\omega_n}{\delta s'}=\frac{\sin P_nOO''}{r_n},$$

et, à cause de l'équation (U'),

$$\lambda\frac{\delta\omega_1}{\delta s'}+\mu\frac{\delta\omega_2}{\delta s'}+\ldots+\varpi\frac{\delta\omega_n}{\delta s'}=0;$$

donc

$$(u')\qquad \lambda\frac{\sin P_1OO''}{r_1}+\mu\frac{\sin P_2OO''}{r_2}+\ldots+\varpi\frac{\sin P_nOO''}{r_n}=0.$$

On conclut aisément des équations (u) et (u') que les éléments δs et $\delta s'$ sont perpendiculaires entre eux; ce qu'il fallait démontrer.

Si les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés et de rayon a, et que les quantités $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ soient toutes égales, on pourra aisément déterminer l'équation des courbes du système (U').

Pour cela nous poserons

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}-\omega_1=\psi_1,$$
$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}-\omega_2=\psi_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}-\omega_n=\psi_n,$$

ce qui donne

$$n\frac{\pi}{2}-\pi-(\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_n)=\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_n.$$

On aura aussi, en désignant par r et ω les coordonnées polaires de notre courbe relatives au centre du polygone,

$$\operatorname{tang}\psi_1 = \frac{r\sin\omega}{a - r\cos\omega},$$

$$\operatorname{tang}\psi_2 = \frac{r\sin\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right)}{a - r\cos\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right)},$$

. . . .

$$\operatorname{tang}\psi_n = \frac{r\sin\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}{a - r\cos\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)},$$

ou [*]

$$\psi_1 = \frac{r}{a}\sin\omega + \frac{r^2}{2a^2}\sin 2\omega + \frac{r^3}{3a^3}\sin 3\omega + \ldots,$$

$$\psi_2 = \frac{r}{a}\sin\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right) + \frac{r^2}{2a^2}\sin 2\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right) + \frac{r^3}{3a^3}\sin 3\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots,$$

. . . .

$$\psi_n = \frac{r}{a}\sin\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + \frac{r^2}{2a^2}\sin 2\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + \frac{r^3}{3a^3}\sin 3\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + \ldots;$$

ajoutant ces équations, et se rappelant que la somme

$$\sin k\omega + \ldots + \sin k\left[\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right]$$

est égale à $n\sin k\omega$ ou à zéro suivant que k est ou non divisible par n, on aura

$$\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n = \frac{r^n}{a^n}\sin n\omega + \frac{r^{2n}}{2a^{2n}}\sin 2n\omega + \frac{r^{3n}}{3a^{3n}}\sin 3n\omega + \ldots = \operatorname{arc\,tang}\frac{r^n \sin n\omega}{a^n - r^n\cos n\omega},$$

ou, en faisant $\operatorname{tang}(\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n) = \cot n\delta$,

(1) $$r^n \cos n(\omega - \delta) = a^n \cos n\delta,$$

ce qui s'accorde avec l'équation de M. Serret.

---

[*] Voyez *Journal de l'École Polytechnique*, XIX^e cahier, page 410.

La propriété qui a servi à former cette équation a été constatée depuis longtemps pour l'hyperbole équilatère, ou dans le cas particulier de $n = 2$.

Dans le Mémoire déjà cité, M. Serret a montré que les courbes représentées par l'équation (1) possèdent n sommets, déterminés par les valeurs de l'angle polaire, δ, $\frac{2\pi}{n} + \delta, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n} + \delta$, et si l'on augmente les rayons correspondants dans le rapport $\sqrt[m]{2}$ à 1, les extrémités seront des points analogues aux foyers des hyperboles équilatères (qui, du reste, font partie des systèmes de courbes que nous considérons). Ces points sont sur la circonférence du cercle dont le rayon ρ est déterminé par l'équation

$$\rho^n = 2a^n \cos n\delta,$$

et le produit des distances d'un point de la courbe aux foyers est égal à la puissance $n^{ième}$ du rayon correspondant de la courbe; enfin le lieu des foyers du système de courbes représentées par l'équation (1) est une courbe dont l'équation est

$$\rho^n = 2a^n \cos n\omega.$$

Nous allons maintenant démontrer quelques théorèmes analogues dans la géométrie sphérique.

Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les distances mesurées par des arcs de grands cercles, d'un point O aux sommets $P_1, P_2, \ldots, P_n$ d'un polygone quelconque formé aussi par des arcs de grands cercles, et $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ les angles $OP_1P_2, OP_2P_3, \ldots, OP_{n-1}P_n$; il est facile de démontrer que les équations

$$\text{(V)} \qquad \left(\operatorname{tang}\frac{\rho_1}{2}\right)^\lambda \left(\operatorname{tang}\frac{\rho_2}{2}\right)^\mu \cdots \left(\operatorname{tang}\frac{\rho_n}{2}\right)^\varpi = \left(\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\right)^{\lambda+\mu+\ldots+\varpi},$$

$$\text{(V')} \qquad \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 + \ldots + \varpi\omega_n = (\lambda + \mu + \ldots + \varpi)\vartheta,$$

représentent deux systèmes de courbes orthogonales.

Si OO' est un élément d'une courbe quelconque du système V, on trouve aisément

$$\lambda \frac{\cos P_1OO'}{\sin \rho_1} + \mu \frac{\cos P_2OO'}{\sin \rho_2} + \ldots + \varpi \frac{\sin P_nOO'}{\sin \rho_n} = 0,$$

et de même si OO'' est un élément d'une courbe quelconque du système V', on a aussi

$$\lambda \frac{\cos P_1 OO''}{\sin \rho_1} + \mu \frac{\cos P_2 OO''}{\sin \rho_2} + \ldots + \varpi \frac{\cos P_n OO''}{\sin \rho_n} = 0,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Si les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés et de rayon *sphérique* α, on aura facilement en coordonnées polaires ρ, ω l'équation des courbes du système V.

On trouve, en effet, assez facilement

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}\rho_1 = \frac{\tang^2 \frac{1}{2}\rho - 2 \tang \frac{1}{2}\alpha \tang \frac{1}{2}\rho \cos\omega + \tang^2 \frac{1}{2}\alpha}{\tang^2 \frac{1}{2}\rho \tang^2 \frac{1}{2}\alpha + 2 \tang \frac{1}{2}\alpha \tang \frac{1}{2}\rho \cos\omega + 1},$$

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}\rho_2 = \frac{\tang^2 \frac{1}{2}\rho - 2 \tang \frac{1}{2}\alpha \tang \frac{1}{2}\rho \cos\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right) + \tang^2 \frac{1}{2}\alpha}{\tang^2 \frac{1}{2}\rho \tang^2 \frac{1}{2}\alpha + 2 \tang \frac{1}{2}\alpha \tang \frac{1}{2}\rho \cos\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right) + 1},$$

. . . .

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}\rho_n = \frac{\tang^2 \frac{1}{2}\rho - 2 \tang \frac{1}{2}\alpha \tang \frac{1}{2}\rho \cos\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + \tang^2 \frac{1}{2}\alpha}{\tang^2 \frac{1}{2}\rho \tang^2 \frac{1}{2}\alpha + 2 \tang \frac{1}{2}\alpha \tang \frac{1}{2}\rho \cos\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + 1};$$

et, par la multiplication,

$$\frac{\tang^{2n} \frac{1}{2}\rho - 2 \tang^n \frac{1}{2}\alpha \tang^n \frac{1}{2}\rho \cos n\omega + \tang^{2n} \frac{1}{2}\alpha}{\tang^{2n} \frac{1}{2}\rho \tang^{2n} \frac{1}{2}\alpha \mp 2 \tang^n \frac{1}{2}\rho \tang^n \frac{1}{2}\alpha \cos n\omega + 1} = \tang^{2n} \frac{\rho}{2},$$

le signe supérieur ou inférieur devant s'employer selon que n est pair ou impair.

On déduit aisément, pour l'équation différentielle du système V'.

$$\frac{d\rho}{\sin \rho d\omega} = \frac{\tang^n \frac{1}{2}\rho (1 \pm \tang^{2n} \frac{1}{2}\alpha) - \tang^n \frac{1}{2}\alpha (1 \pm \tang^{2n} \frac{1}{2}\rho) \cos n\omega}{\tang^n \frac{1}{2}\alpha \sin n\omega (1 \mp \tang^{2n} \frac{1}{2}\rho)}.$$

L'intégration de cette équation s'effectue sans difficulté : δ désignant une constante, on trouve pour l'équation du système V',

$$(2) \qquad \frac{1 \pm \tang^{2n} \frac{1}{2}\rho}{1 \pm \tang^{2n} \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\tang^n \frac{1}{2}\rho}{\tang^n \frac{1}{2}\alpha} \cdot \frac{\cos n(\omega - \delta)}{\cos n\delta}.$$

Si $n = 2$, l'équation du système V devient

$$\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\rho - \frac{2\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\alpha(1-\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\beta)}{1-\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\beta}\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\rho\cos 2\omega + \frac{\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\alpha - \operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\beta}{1-\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\beta} = 0,$$

équation qui présente de l'analogie avec celle des cassinoïdes homofocales. Si l'on considère la courbe représentée par cette équation comme la base d'un cône qui aurait pour sommet le centre de la sphère, cette surface sera du quatrième ordre; l'équation (2) pour $n=2$ deviendra

$$\frac{1}{\sin^2\rho} = \frac{(1-\sin^2\alpha\sin^2\delta)\cos^2(\omega-\delta) - (1-\sin^2\alpha\cos^2\delta)\sin^2(\omega-\delta)}{\sin^2\alpha\cos 2\delta},$$

et représente des hyperboles équilatères sphériques ayant même centre et un point commun.

Concluons donc que :

Si deux droites passent par un point, le lieu d'une troisième droite qui passe par le même point et fait les angles θ, θ' *avec les deux premières, tel que le produit* $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta' =$ *constante, sera un cône du quatrième ordre, et le système de cônes, dans lequel cette constante varie, sera coupé orthogonalement par un système de cônes du second ordre, ayant même sommet et une commune arête. Le lieu des lignes focales des cônes du second ordre sera un cône du quatrième ordre et fait partie du système des trajectoires orthogonales.*

Ce théorème paraît être analogue à un théorème donné par M. Lamé, et dont parle M. Serret dans le Mémoire si souvent cité.