JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAYLEY

Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 245-250.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__245_0>

MÉMOIRE

SUR LES COURBES A DOUBLE COURBURE
ET LES SURFACES DÉVELOPPABLES;

Par M. A. CAYLEY.

On trouve, dans la *Théorie des courbes algébriques* de M. Plücker, de très-belles recherches sur le nombre des différentes singularités (points d'inflexion, tangentes doubles, etc.) des courbes planes. Les mêmes principes peuvent s'appliquer au cas des courbes à trois dimensions. Pour cela, considérons une suite continue de points dans l'espace, les lignes qui passent par deux points consécutifs, et les plans qui passent par trois points consécutifs; ou, en envisageant autrement la même figure, une suite de lignes dont chacune rencontre la ligne consécutive, les points d'intersection de deux lignes consécutives, et les plans qui contiennent ces lignes; ou encore de cette manière: une suite de plans, les lignes d'intersection de deux plans consécutifs, les points d'intersection de trois plans consécutifs. C'est ce que l'on peut nommer *un système simple*. Ce système est évidemment formé d'une courbe à double courbure et d'une surface développable; la courbe est l'arête de rebroussement de la surface, la surface est l'osculatrice développable de la courbe. Les points du système sont des points dans la courbe, les lignes du système sont les tangentes à la courbe, les plans du système sont les plans osculateurs de la courbe. De même, les plans sont les plans tangents de la surface, les lignes sont les génératrices de la surface; pour les points, on peut les nommer les points de rebroussement de la surface. J'entendrai dans la suite par les termes *ligne par deux points, ligne dans deux plans,* une ligne menée par deux points quelconques (non consécutifs en général) du système, et la ligne d'intersection de deux plans quelconques (non consécutifs en général) du système. Enfin, chaque ligne du système est rencontrée, en général, par un certain nombre d'autres lignes non consécutives du système. Je nommerai le point de rencontre d'une telle paire de lignes *point dans deux lignes*, et le plan qui contient une telle paire *plan par deux lignes*.

Supposons qu'un plan donné contient, *en général*, m points du système, qu'une ligne donnée rencontre, *en général*, r lignes du système, qu'un point donné est situé, *en général*, dans n plans du système. Le système est dit être de l'ordre m, du rang r, de la classe n. On voit tout de suite que l'ordre de la courbe est égal à l'ordre du système, ou à m; la classe de la courbe au rang du système, ou à r. Et de même, l'ordre de la surface au rang du système, ou à r; la classe de la surface à la classe du système, ou à n.

Cela posé, les singularités proprement dites (ouvrage cité, page 202) sont les deux suivantes, analogues aux points d'inflexion et de rebroussement dans les courbes planes :

1. Quand quatre points consécutifs sont situés dans le même plan, ou, autrement dit, quand trois lignes consécutives sont situées dans le même plan, ou quand deux plans consécutifs deviennent identiques; je dirai qu'il y a alors un *plan stationnaire*, et je représenterai par la lettre α le nombre de ces plans.

2. Quand quatre plans consécutifs se rencontrent dans le même point, ou, autrement dit, quand trois lignes se rencontrent au même point, ou quand deux points consécutifs deviennent identiques; je dirai qu'il y a alors un *point stationnaire*, et je représenterai par β le nombre de ces points.

Dans le premier cas, il y a un point d'inflexion sphérique dans la courbe, et une ligne d'inflexion dans la surface. On n'a pas donné de noms à ce qui arrive dans la courbe et la surface dans le second cas; et puisque la singularité est suffisamment distinguée déjà en la nommant *point stationnaire*, il n'est pas nécessaire de suppléer à cette omission. On peut dire que ces deux cas sont les singularités simples d'un système. Il y a des singularités d'un ordre plus élevé dont on n'a pas besoin ici. Ensuite, il y a des singularités d'une autre espèce, en quelque sorte analogues aux points et tangentes doubles, mais qui ont rapport à un point ou plan indéterminé (hors du système); savoir :

3. Un plan donné peut contenir, *en général*, un nombre g de *lignes en deux plans*.

4. Un point donné peut être situé, *en général*, dans un nombre h de *lignes par deux points*.

5. Un plan donné peut contenir, *en général*, un nombre x de *points en deux lignes*.

6. Un point donné peut être situé, *en général*, dans un nombre y de *plans par deux lignes*.

Ces quatre cas sont les singularités impropres simples du système.

Il faut maintenant chercher les relations qui ont lieu entre les nombres $m, r, n, \alpha, \beta, g, h, x, y$.

Citons d'abord les formules de M. Plücker pour les courbes planes (page 211), en changeant seulement les lettres, pour éviter la confusion. En représentant par μ l'ordre d'une courbe, par ν sa classe, par ξ le nombre de ses points doubles, η de ses points de rebroussement, a de ses tangentes doubles, b de ses points d'inflexion, l'on aura les six équations

$$\begin{aligned}
\nu &= \mu.\overline{\mu-1} - (2\xi + 3\eta),\\
b &= 3\mu.\overline{\mu-2} - (6\xi + 8\eta),\\
a &= \tfrac{1}{2}\mu.\overline{\mu-2}\,\overline{\mu^2-9} - (2\xi + 3\eta)(\mu.\overline{\mu-1} - 6) + 2\xi.\overline{\xi-1}\\
&\quad + \tfrac{9}{2}\eta.\overline{\eta-1} + 6\xi\eta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu &= \nu.\overline{\nu-1} - (2a + 3b),\\
\eta &= 3\nu.\overline{\nu-2} - (6a + 8b),\\
\xi &= \tfrac{1}{2}\nu.\overline{\nu-2}\,\overline{\nu^2-9} - (2a + 3b)(\nu.\overline{\nu-1} - 6) + 2a.\overline{a-1}\\
&\quad + \tfrac{9}{2}b.\overline{b-1} + 6ab,
\end{aligned}$$

dont les trois dernières se dérivent des trois premières, et *vice versâ*.

Considérons ensuite un plan donné quelconque en conjonction avec le système. Ce plan coupe la surface suivant une courbe plane. Les points de cette courbe sont les points de rencontre du plan avec les lignes du système, les tangentes de cette courbe sont les lignes de rencontre du plan avec les plans du système. Il est clair que la courbe est de l'ordre r et de la classe n. Chaque fois que le plan contient un point en deux lignes, la courbe a un point double; aux points où le plan rencontre la courbe à double courbure, il y a dans la courbe un rebroussement (car, dans ce cas, il y a deux lignes du système qui coupent le plan en un même point, c'est-à-dire qu'il y a dans la courbe d'intersection un point stationnaire ou de rebroussement). Quand le plan contient une ligne en deux plans, il y a dans la courbe une tangente double; et enfin, pour chaque plan stationnaire du système, il y a dans la courbe une tangente stationnaire ou une inflexion. Donc nous avons, dans la courbe, r l'ordre, n la classe, x le nombre de points doubles, m de points de rebroussement, g de tangentes doubles, α de points d'inflexion, ce qui donne les six équations (équivalentes à trois):

$$\begin{aligned}
n &= r.\overline{r-1} - (2x + 3m),\\
\alpha &= 3r.\overline{r-2} - (6x + 8m),\\
g &= \tfrac{1}{2}r.\overline{r-2}\,\overline{r^2-9} - (2x + 3m)(r.\overline{r-1} - 6) + 2x.\overline{x-1}\\
&\qquad + \tfrac{9}{2}m.\overline{m-1} + 6xm;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r &= n.\overline{n-1} - (2g + 3\alpha),\\
m &= 3n.\overline{n-2} - (6g + 8\alpha),\\
x &= \tfrac{1}{2}n.\overline{n-2}\,\overline{n^2-q} - (2g + 3\alpha)(n.\overline{n-1} - 6) + 2g.\overline{g-1}\\
&\qquad + \tfrac{9}{2}\alpha.\overline{\alpha-1} + 6g\alpha,
\end{aligned}$$

(où l'on peut remarquer la symétrie à l'égard des combinaisons n, α, g, et r, m, x).

De même, en considérant un point donné quelconque en conjonction avec le système, ce point détermine, avec la courbe à double courbure, une surface conique, et, par des raisonnements pareils, on fait voir que, dans cette surface conique, l'ordre est m, la classe r, le nombre des lignes doubles n, des lignes de rebroussement 6, des plans tangents doubles y, des lignes d'inflexion h, ce qui donne les équations (dont trois seulement sont indépendantes) :

$$r = m.\overline{m-1} - (2h + 3\beta),$$
$$n = 3m.\overline{m-2} - (6h + 8\beta),$$
$$y = \tfrac{1}{2}\, m.\overline{m-2}\;\overline{m^2-q} - (2h + 3\beta)\,(m.\overline{m-1} - 6) + 2h.\overline{h-1}$$
$$+ \tfrac{9}{2}\,\beta.\overline{\beta-1} + 6h\beta;$$

$$m = r.\overline{r-1} - (2y + 3n),$$
$$\beta = 3r.\overline{r-2} - (6y + 8n),$$
$$h = \tfrac{1}{2}\, r.\overline{r-2}\;\overline{r^2-9} - (2y + 3n)\,(r.\overline{r-1} - 6) + 2y.\overline{y-1}$$
$$+ \tfrac{9}{2}\, n.\overline{n-1} + 6yn,$$

(dans lesquelles on remarque la correspondance r, n, y; m, β, h. Et, en les comparant avec les autres six équations, la correspondance $m, r, n, \alpha, \beta, g, h, x, y$; $n, r, m, \beta, \alpha, h, g, y, x$).

En considérant une courbe à double courbure d'un ordre donné m, on peut attribuer à h, β des valeurs quelconques (entre certaines limites), et l'on a alors, pour déterminer les autres quantités, les équations suivantes :

$$r = m.\overline{m-1} - (2h + 3\beta),$$
$$n = 3m.\overline{m-2} - (6h + 8\beta),$$
$$y = \tfrac{1}{2}\, m.\overline{m-2}\;\overline{m^2-9} - (2h + 3\beta)\,(m.\overline{m-1} - 6) + 2h.\overline{h-1}$$
$$+ \tfrac{9}{2}\,\beta.\overline{\beta-1} + 6h\beta;$$

$$h = r.\overline{r-1} - (2x + 3m),$$
$$\alpha = 3r.\overline{r-2} - (6x + 8m),$$
$$g = \tfrac{1}{2}\, r.\overline{r-2}\;\overline{r^2-9} - (2x + 3m)\,(r.\overline{r-1} - 6) + 2x.\overline{x-1}$$
$$+ \tfrac{9}{2}\, m.\overline{m-1} + 6mx.$$

Au cas d'une courbe plane, les trois premières équations continuent d'être vraies, mais les trois autres n'ont pas de sens. Le cas le plus simple est celui d'une courbe du troisième ordre dans l'espace. On a, dans ce cas, $m = 3$, $n = 1$, $\beta = 0$; et de là le système

$$\begin{array}{ccccccccc} m, & n, & r, & \alpha, & \beta, & g, & h, & x, & y; \\ 3, & 3, & 4, & 0, & 0, & 1, & 1, & 0, & 0; \end{array}$$

c'est-à-dire l'osculatrice développable d'une courbe du troisième ordre est une surface du quatrième ordre, etc. On obtient aussi un système très-simple, en écrivant $m = 4$, $h = 2$, $\beta = 1$, ce qui donne

$$\begin{array}{ccccccccc} m, & n, & r, & \alpha, & \beta, & g, & h, & x, & y; \\ 4, & 4, & 5, & 1, & 1, & 2, & 2, & 2, & 2. \end{array}$$

Mais cela n'appartient pas, à ce que je crois, aux courbes les plus générales du quatrième ordre.

Le problème de classifier les courbes à double courbure au moyen des surfaces que l'on peut faire par ces courbes, ou de trouver la nature d'une courbe qui est l'intersection de deux surfaces données, paraît appartenir plutôt à la théorie des surfaces qu'à celle des courbes. Je n'ai rien de complet à offrir sur cela. Seulement je crois pouvoir dire que quand la courbe d'intersection de deux surfaces des ordres μ, ν est de l'ordre $\mu\nu$ (ce qui est le cas général), on a toujours

$$2h = \mu\nu.\overline{\mu - 1}\,\overline{\nu - 1},$$

de manière que la classe de la courbe est au plus $mn(m + n - 2)$. Mais j'espère revenir une autre fois sur cette question. Il est presque inutile de remarquer que pour un système qui est réciproque polaire d'un système donné, il faut seulement changer m, r, n, α, β, g, h, x, y en n, r, m, β, α, h, g, y, x. Par exemple, les deux systèmes qui viennent d'être considérés ont des réciproques de la même forme.