JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAYLEY

Addition à la note sur quelques intégrales multiples, insérée dans le cahier d'avril

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 242-244.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__242_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

ADDITION A LA NOTE

SUR QUELQUES INTÉGRALES MULTIPLES,

INSÉRÉE DANS LE CAHIER D'AVRIL [*];

PAR M. A. CAYLEY.

On démontre, au moyen des formules que j'ai données sur ce sujet, une propriété remarquable de l'intégrale multiple

$$V = \int dx_1 \ldots dx_n \, x_1^{2\alpha_1-1} \ldots x_{f+1}^{2\alpha_{f+1}} \ldots \varphi(a_1 - x_1 t, \ldots),$$

prise entre les limites

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{h_n^2} \overset{=}{<} 1.$$

En effet, en supposant toujours que l'on peut développer la fonction φ selon les puissances entières et positives de t, l'intégrale V peut s'exprimer sous la forme

$$V = \frac{(-)^f \pi^{\frac{1}{2}n} t^f}{2^{k+f}} \left(\frac{d}{da_1} \cdots \frac{d}{da_f}\right) \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(h_n^3 \frac{d}{dh_n}\right)^{\alpha_n} h_1^3 \ldots h_{f+1} \ldots U,$$

où

$$k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$

$$U = \mathbf{S}_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}.\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+k+f+\frac{1}{2}n+1)} \nabla^p \varphi(a_1, \ldots)\right);$$

$$\nabla = h_1^2 \frac{d^2}{da_1^2} + \ldots + h_n^2 \frac{d^2}{da_n^2}.$$

Soit

$$W = \int dx_1 \ldots \varphi(a_1 - x_1 t T, \ldots)$$

entre les mêmes limites que V. On a

$$W = \pi^{\frac{1}{2}n} h_1 \ldots h_n \mathbf{S}_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{T^{2p} t^{2p}}{2^{2p}.\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+\frac{1}{2}n+1)} \nabla^p . \varphi(a_1, \ldots)\right)$$

---

[*] Voir page 158.

En multipliant par

$$\frac{2}{\Gamma(k+f)} \mathrm{T}^{n+1} (1 - \mathrm{T}^2)^{k+f} d\mathrm{T},$$

et intégrant depuis $\mathrm{T} = 0$ jusqu'à $\mathrm{T} = 1$, on obtient

$$\frac{2}{\Gamma(k+f)} \int_0^1 \mathrm{T}^{n+1} (1 - \mathrm{T}^2)^{k+f} \mathrm{W}\, d\mathrm{T}$$

$$= \pi^{\frac{1}{2}n} h_1 \ldots h_n \mathbf{S}_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{t^{2p}}{2^{2p} . \Gamma(p+1) \Gamma(p+k+f+\frac{1}{2}n+1)} \nabla^p \varphi(a_1, \ldots) \right),$$

puisque en général

$$\frac{2}{\Gamma(k+f)} \int_0^1 \mathrm{T}^{2p+n+1} (1 - \mathrm{T}^2)^{k+f} d\mathrm{T} = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2}n+1)}{\Gamma(p+k+f+\frac{1}{2}n+1)}.$$

On a donc l'équation

$$\frac{2}{\Gamma(k+f)} \int_0^1 \mathrm{T}^{n+1} (1 - \mathrm{T}^2)^{k+f} \mathrm{W}\, d\mathrm{T} = \pi^{\frac{1}{2}n} h_1 \ldots h_n \mathrm{U}.$$

Mettons la valeur de U qui en résulte, dans l'équation entre V et U; faisons aussi $t = 1$, ce qui ne nuit pas à la généralité. On a, en rassemblant les formules,

$$\mathrm{V} = \int dx_1 \ldots dx_n \ldots x_1^{2\alpha_1+1} \ldots x_{f+1}^{2\alpha_f+1} \ldots \varphi(a_1 - x_1, \ldots),$$

$$\mathrm{W} = \int dx_1 \ldots dx_n . \varphi(a_1 - x_1 \mathrm{T}, \ldots),$$

$$\mathrm{V} = \frac{(-1)^f}{2^{k+f-1} \Gamma(k+f)} \left(\frac{d}{da_1} \cdots \frac{d}{da_f} \right) \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(h_n^3 \frac{d}{dh_n} \right)^{\alpha_n} . h_1^2 \ldots h_f^2 \int_0^1 \mathrm{T}^{n+1} (1 - \mathrm{T}^2)^{k+f} \mathrm{W}\, d\mathrm{T}.$$

Ce qui établit ce théorème: La suite des intégrales V s'exprime au moyen des coefficients différentiels par rapport à $h_1 \ldots h_n$ et $a_1 \ldots a_f$ de la seule intégrale

$$\int_0^1 \mathrm{T}^{n+1} (1 - \mathrm{T}^2)^{k+f} \int dx_1 \ldots dx_n \ldots \varphi(a_1 - x_1 \mathrm{T}, \ldots).$$

En supposant que les indices dans V soient tous pairs, on a $f = 0$. Les symboles $\frac{d}{da_1},\ldots$ n'entrent plus dans l'expression de V. En changeant la fonction φ, on a ces formules plus simples

$$\left\{\begin{aligned} V &= \int dx_1 \ldots dx_n \,.\, x_1^{2\alpha_1} \ldots x_n^{2\alpha_n} \,.\, \varphi(x_1, \ldots, x_n), \\ W &= \int dx_1 \ldots dx_n \,.\, \varphi(\mathrm{T}x_1, \ldots, \mathrm{T}x_n), \\ V &= \frac{1}{2^{k-1}\Gamma(k)} \left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(h_n^3 \frac{d}{dh_n}\right)^{\alpha_n} \int_0^1 \mathrm{T}^{n+1}(1-\mathrm{T}^2)^k \, W \, d\mathrm{T}, \end{aligned}\right.$$

où V s'exprime au moyen des coefficients différentiels par rapport à $h_1, \ldots, h_n$ de l'intégrale

$$\int_0^1 \mathrm{T}^{n+1}(1-\mathrm{T}^2)^k \int dx_1 \ldots dx_n \,.\, \varphi(\mathrm{T}x_1, \ldots, \mathrm{T}x_n),$$

de manière que nous avons trouvé des relations entre des intégrales définies qui contiennent une fonction indéterminée, assujettie à la seule condition d'être développable dans les limites de l'intégration selon les puissances entières et positives des variables [*], mais dans lesquelles les limites sont données par

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{h_n^2} \overset{=}{<} 1.$$

[*] Cette condition est supposée dans la démonstration, mais il me paraît, d'après la forme du résultat, qu'elle n'est pas essentielle.