JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-H. GRILLET

Sur les exponentielles successives d'Euler et les logarithmes des différents ordres des nombres

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 233-241.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__233_0>

SUR

LES EXPONENTIELLES SUCCESSIVES D'EULER

ET

LES LOGARITHMES DES DIFFÉRENTS ORDRES DES NOMBRES;

Par M. J.-H. GRILLET,

Élève de l'École normale.

---

1. La première partie des *Actes de l'Académie de Saint-Pétersbourg* pour l'année 1777, contient un Mémoire d'Euler sur l'expression

$$b^{b^{b^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{b^u}}}}}},$$

que Condorcet avait trouvée pour la somme d'une série particulière. Je rencontrai cette même expression en cherchant la solution d'un certain problème, et je l'étudiai. Je ne crois pas hors de propos de faire connaître les résultats auxquels je suis parvenu, parce qu'ils sont plus précis et plus complets que ceux d'Euler; j'y joindrai la solution du problème qui m'a conduit à m'occuper de ces questions.

2. L'expression de Condorcet, que je représenterai par $F_n(b, u)$, n désignant le nombre des lettres b, n'a pas de limite, pour n croissant indéfiniment, quand b est plus grand que $e^{\frac{1}{e}} = 1,444\,667\ldots$ Si b est compris entre 1 et $e^{\frac{1}{e}}$, elle aura, pour des valeurs convenables de u, une limite x donnée par l'équation

$$x = b^x$$

qui a deux racines positives: l'une, a, comprise entre 1 et e; l'autre, A, plus grande que $e = 2,718\,28\ldots$ Toutes les fois que u est plus petit que A, l'expression a pour limite a; si $u = \mathrm{A}$, elle est égale à A, quel que soit le nombre de lettres b qu'elle contienne; si u est plus grand que A, elle n'a plus de limite.

En effet, l'équation

$$x = b^x,$$

qui fournit la limite quand il y en a une, n'a de racine réelle que si b ne surpasse point $e^{\frac{1}{e}}$, car la droite $y = x$ est tangente à la courbe $y = \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^x$. Si b est compris entre 1 et $e^{\frac{1}{e}}$, la droite $y = x$ coupe la courbe $y = b^x$ en deux points dont les ordonnées sont a et A, et comme l'ordonnée du point de contact de la tangente menée par l'origine à la courbe est toujours égale à e, quel que soit b, on voit que a est toujours compris entre 1 et e, et A entre e et ∞. Si b tend vers l'unité, $a > b$ tend aussi vers l'unité, tandis que A croît indéfiniment.

Si u désigne une ordonnée de la droite $y = x$, b^u sera l'ordonnée de la courbe qui correspond à la même abscisse; donc quand u est plus petit que a, b^u est plus grand que u, mais encore inférieur à a; $F_n(b, u)$ croît avec n et tend vers a; si u est compris entre a et A, b^u est moindre que u, mais plus grand que a, $F_n(b, u)$ décroît et tend vers a quand n croît indéfiniment. Si u est plus grand que A, $F_n(b, u)$ croît avec n et ne peut avoir de limite, car elle serait plus grande que $u > A$.

On arrive bien simplement à ces résultats en suivant, sur une figure, la marche de la fonction $F_n(b, u)$ quand n croît. Soient, par exemple, *Pl. I, fig.* 1, amA la courbe $y = b^x$, OaA la droite $y = x$, $aa' = a$, $AA' = A$, et soit MM′ un nombre u compris entre a et A; si MM′, NN′, PP′, QQ′,... sont parallèles à OY, mN, nP, pQ,... parallèles à OX, on a

$$NN' = b^u = F_1(b, u), \quad PP' = F_2(b, u), \quad QQ' = F_3(b, u), \ldots;$$

donc $F_n(b, u)$ a pour limite a quand n croît indéfiniment.

Euler a exprimé a, A, b en fonction du rapport $\frac{A}{a} = p$. On a

$$a = p^{\frac{1}{p-1}}, \quad A = pa, \quad b = a^{\frac{1}{a}};$$

ces formules font connaître exactement une infinité de valeurs correspondantes de a, A, b; il suffit de faire varier p entre 1 et ∞.

3. Si b est compris entre 1 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e = 0,065988\ldots$, $F_n(b, u)$ a toujours une limite, quelle que soit la valeur réelle de u. Cette limite est la racine unique α de l'équation

$$x = b^x.$$

Si b est compris entre 0 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, l'expression n'a plus de limite, à moins que u ne soit égal à la racine unique γ de l'équation $x = b^x$, et, dans ce cas, elle est toujours égale à γ, quel que soit le nombre de lettres b qu'elle renferme. Mais pour une valeur quelconque de u, l'expression où n'entreraient jamais qu'un nombre pair de lettres b a une limite quand ce nombre augmente, et celle où il n'en entrerait qu'un nombre impair a une autre limite. Ces deux limites sont données par l'équation

$$x = b^{b^x}$$

qui a trois racines positives : l'une est γ, les deux autres sont comprises, l'une, c, entre b et γ ; l'autre, C, entre γ et 1, et l'on a

$$b < c < \gamma < C < 1.$$

Si l'on prend toujours un nombre impair de lettres b, l'expression de Condorcet a pour limite c, quand $u > \gamma$, et pour limite C, quand $u < \gamma$.

L'inverse a lieu quand on prend toujours un nombre pair de lettres b.

Pour arriver à ces propositions, je vais démontrer que les deux courbes $y = b^x$, $X = b^Y$ ne se coupent qu'en un point, lorsque b est compris entre 1 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, et en trois points, si b est compris entre $\left(\frac{1}{e}\right)^e$ et 0. Il est d'abord évident, *fig.* 2, que si l'angle $O\gamma T$ que fait avec la bissectrice de l'angle des axes la tangente à la courbe $y = b^x$ menée par le point $y = x$, est plus petit qu'un angle droit, c'est-à-dire si b est compris entre 0 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, il y aura plusieurs points d'intersection. Ces points seront situés deux à deux sur une même perpendiculaire à $O\gamma$, et si l'on considère un de ces groupes de deux points, que C et c soient leurs ordonnées et que l'on désigne par p le rapport $\frac{C}{c}$ plus grand que l'unité de ces deux ordonnées, on aura

$$c = b^{C}, \quad C = b^{c},$$

$$c = p^{\frac{p}{1-p}}, \quad C = p^{\frac{1}{1-p}}, \quad b = \left(\frac{p^{\frac{p}{p-1}}}{p^{\frac{1}{1-p}}}\right),$$

$$\frac{dc}{dp} = \frac{c}{(p-1)^2}(1 - p + lp), \quad \frac{dC}{dp} = \frac{c}{(p-1)^2}(1 - p + plp),$$

$$\frac{db}{dp} = \frac{b}{C(p-1)^3}[p(lp)^2 - (p-1)^2].$$

Si p croît à partir de l'unité, $\frac{db}{dp}$ est toujours négatif, ce dont on peut s'assurer en remarquant que

$$p(lp)^2 - (p-1)^2$$

est de même signe que

$$[\sqrt{p}\, lp - (p-1)],$$

ou, si l'on pose

$$lp = z,$$

que

$$\left[ze^{\frac{z}{2}} - (e^z - 1)\right].$$

En développant cette expression, on verra que, pour toute valeur de z plus grande que o, elle est négative. De même, $\frac{dc}{dp}$ est négatif, $\frac{dC}{dp}$ positif. Si p croît indéfiniment, c tend vers zéro, C vers l'unité et b vers zéro; si p décroît et tend vers l'unité, c et C tendent vers $\left(\frac{1}{e}\right)$ et b vers $\left(\frac{1}{e}\right)^e$. Si donc p croît indéfiniment à partir de 1, b décroît continuellement de $\left(\frac{1}{e}\right)^e$ à o, c de $\left(\frac{1}{e}\right)$ à o et C croît de $\left(\frac{1}{e}\right)$ à 1.

De là résulte qu'à une valeur de p ne correspond qu'une valeur de b, et réciproquement; donc à une valeur de b ne correspondent qu'une seule valeur de c et une seule de C. Il n'y a donc plusieurs points d'intersection que quand b est compris entre $\left(\frac{1}{e}\right)^e$ et o, et alors il n'y en a que trois dont un sur la droite $y = x$.

4. On a, entre les ordonnées des deux logarithmiques $y = b^x$, $X = b^Y$, et de la droite $\eta = \xi$ qui correspond à une même abscisse, les relations

$$(1) \qquad y = b^\eta, \quad y = b^{b^Y}.$$

Mais si, dans la fonction $F_n(b, u)$, on remplace u par $u' > u$, l'exposant de la $n^{ième}$ lettre b augmente, celui de la $(n-1)^e$ diminue, celui de la $(n-2)^e$ augmente, etc.... Donc

$$F_{2n}(b, u') > F_{2n}(b, u), \qquad F_{2n+1}(b, u') < F_{2n+1}(b, u).$$

Si b est compris entre $\left(\frac{1}{e}\right)^e$ et 1, et que u soit plus petit que la racine α de l'équation

$$x = b^x,$$

b^u est plus grand que α, b^{b^u} est plus petit que α, mais cependant plus grand que u en vertu des équations (1); donc

$F_{2n}(b, u)$ croît avec n en restant plus petit que α; il a une limite S.

$F_{2n+1}(b, u)$ décroît en restant plus grand que α quand n augmente; il tend vers une limite S'. S et S' sont des racines de l'équation

$$x = b^{b^x},$$

que l'on obtient par l'intersection des deux courbes $X = b^Y$, $y = b^x$. Ces deux courbes ne se coupent qu'en un point, qui donne la racine α; donc $F_{2n}(b, u)$, $F_{2n+1}(b, u)$ ont tous deux pour limite α quand $u < \alpha$; il en est de même quand u est plus grand que α.

On prouverait de la même manière que si b est compris entre o et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, que u soit plus petit que c, $F_{2n}(b, u)$ croît avec n et tend vers c, $F_{2n+1}(b, u)$ décroît quand n augmente et tend vers C. Si u est compris entre γ et c, $F_{2n}(b, u)$ décroît et tend vers c quand n augmente, tandis que $F_{2n+1}(b, u)$ croît avec n et tend vers C; de sorte que, généralement, toutes les fois que u est plus petit que γ, $F_{2n}(b, u)$ a pour limite c, $F_{2n+1}(b, u)$ a pour limite C. Ce serait le contraire si u était plus grand que γ.

On peut encore suivre les fonctions $F_{2n}(b, u)$, $F_{2n+1}(b, u)$ sur une figure. Ainsi soient, *fig.* 2, $cm\gamma$C la courbe $y = b^x$, $cm'\gamma$C la courbe $X = b^Y$, $CC' = C$, $\gamma\gamma' = \gamma$, $cc' = c$, et $q'Q' = u$ un nombre compris entre γ et c. Si QQ′, pp' NN′, MM′,... sont parallèles à OY, qp', pn', nm',... parallèles à OX, on a

$$F_1(b, u) = QQ',\quad F_3(b, u) = PP',\quad F_5(b, u) = NN',\quad F_7(b, u) = MM',\ldots,$$
$$F_2(b, u) = qQ',\quad F_4(b, u) = pP',\quad F_6(b, u) = nN',\quad F_8(b, u) = mM',\ldots;$$

donc

$$\lim.\ F_{2n+1}(b, u) = C,\quad \lim F_{2n}(b, u) = c.$$

5. Je passe maintenant au problème que j'ai annoncé précédemment.

Je désigne les expressions

$$\log N,\quad \log.\log N,\quad \log.\log.\log N,\ldots$$

par

$$l N,\quad l_2 N,\quad l_3 N,\ldots,$$

et je les appelle généralement les logarithmes des différents ordres de N. Je me suis proposé de déterminer entre quels nombres doit être comprise la base b d'un système de logarithmes, pour que tous les logarithmes des différents ordres d'un nombre donné N soient réels dans ce système. Voici quels sont les résultats que j'ai obtenus :

Si N est plus grand que e, il faut et il suffit que b soit compris entre 1 et $e^{\frac{1}{e}}$.

Si N est compris entre 1 et e, il faut et il suffit que b soit compris entre 1 et $N^{\frac{1}{N}}$.

Dans le système de logarithmes dont la base b est comprise entre 1 et $e^{\frac{1}{e}}$, le logarithme de l'ordre n d'un nombre quelconque compris entre les racines de l'équation

$$x = b^x$$

désignées précédemment par a et A, augmente avec n et a pour limite A; celui d'un nombre plus grand que A diminue quand N augmente, et a encore pour limite A.

Démonstration. Si $l_n(\mathrm{N})$ reste toujours réel dans le système de base b, il faut qu'il soit toujours plus grand que b, sans quoi $l_{n-3}(\mathrm{N})$ serait imaginaire; or on a

$$\mathrm{N} = \mathrm{F}_n(b, l_n\mathrm{N}),$$

donc

$$\mathrm{N} > \mathrm{F}_n(b, b),$$

quel que soit n.

Il faut que $\mathrm{F}_n(b, b)$, qui croît avec n, ait une limite, et b doit être compris entre 1 et $e^{\frac{1}{e}}$, si N est plus grand que e; entre 1 et $\mathrm{N}^{\frac{1}{\mathrm{N}}}$, si N est compris entre 1 et e. Ces conditions sont suffisantes, puisque dans la base $\left(\mathrm{N}^{\frac{1}{\mathrm{N}}}\right)$ les logarithmes des différents ordres de N sont tous égaux à N.

Si N est compris entre a et A, on voit, d'après la relation

$$\mathrm{N} = \mathrm{F}_n(b, l_n\mathrm{N}),$$

que $l_n\mathrm{N}$ croît avec n, car d'abord $l_n\mathrm{N}$ est toujours compris entre a et A, puisque

$$l_n a = a, \quad l_n\mathrm{A} = \mathrm{A};$$

en outre, $\mathrm{F}_{n-1}(b, l_n\mathrm{N})$ est plus petit que $\mathrm{F}_n(b, l_n\mathrm{N})$; donc, puisque

$$\mathrm{F}_{n+1}(b, l_{n+1}\mathrm{N}) = \mathrm{F}_n(b, l_n\mathrm{N}),$$

on doit avoir

$$l_{n+1}\mathrm{N} > l_n\mathrm{N}.$$

$l_n\mathrm{N}$ croît donc avec N en restant inférieur à A, et il a une limite donnée par l'équation

$$lx = x \quad \text{ou} \quad x = b^x;$$

comme cette limite ne peut être a, elle est égale à A. De même, si N est plus grand que A, $l_n\mathrm{N}$ décroît quand n augmente et tend aussi vers A.

On peut arriver à ces résultats en suivant, sur la *fig.* 1, la marche de la fonction l_nN.

6. Si la base b est comprise entre 1 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, il n'y a qu'un nombre dont tous les logarithmes des différents ordres soient réels; ce nombre est la racine α de l'équation

$$x = b^x,$$

dont tous les logarithmes sont égaux à α.

Si la base b du système est comprise entre 0 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, pour que tous les logarithmes des différents ordres d'un nombre soient réels dans ce système, il faut et il suffit qu'il soit compris entre les racines c et C de l'équation

$$x = b^{b^x},$$

et le logarithme de l'ordre n de tout nombre compris entre c et C tend vers la limite γ quand n croît indéfiniment.

Démonstration. Pour c et C on a toujours

$$l_{2n}\, c = c, \quad l_{2n+1}\, c = \mathrm{C}, \quad l_{2n}\, \mathrm{C} = \mathrm{C}, \quad l_{2n+1}\, \mathrm{C} = c.$$

Il faut encore, pour que l_nN soit toujours réel, qu'il reste plus grand que b; donc, en vertu de la relation

$$\mathrm{N} = \mathrm{F}_n(b,\, l_n \mathrm{N}),$$

on aura

$$\mathrm{N} > \mathrm{F}_{2n}(b, b),$$
$$\mathrm{N} < \mathrm{F}_{2n+1}(b, b).$$

Si b est compris entre 1 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, il faut que N soit égal à α; si b est compris entre 0 et $\left(\frac{1}{e}\right)^e$, il faut que N soit compris entre c et C. Ces conditions sont suffisantes, puisque les logarithmes des différents ordres de c et C sont réels.

7. Si N est compris entre 1 et $\frac{1}{e}$, il faut et il suffit, pour que les logarithmes des différents ordres de N soient réels, que l'on ait

$$b < \left(\varpi^{\frac{\varpi^{\frac{\varpi}{\varpi-1}}}{1-\varpi}}\right),$$

ϖ désignant la racine plus grande que 1 de l'équation

$$p^{\frac{1}{1-p}} = \mathrm{N};$$

si N est compris entre o et $\frac{1}{e}$, la même inégalité devra avoir lieu, ϖ désignant la racine plus grande que 1 de l'équation

$$p^{\frac{p}{1-p}} = \mathrm{N};$$

cela résulte des formules qui expriment c et C en fonction de p.

Si N est compris entre c et C, $l_n\mathrm{N}$ tend vers γ quand n croît indéfiniment; cela se démontre comme dans le cas d'une base plus grande que l'unité, et l'on peut aussi suivre la marche de $l_n\mathrm{N}$ sur la *fig.* 2.