JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur diverses questions d'analyse et de physique mathématique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 222-228.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__222_0>

Sur diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique;

Par J. LIOUVILLE.

Dans la séance du 12 mai dernier, j'ai communiqué verbalement à l'Académie les résultats de quelques recherches relatives à diverses questions d'analyse et de physique mathématique. Voici le résumé de cette communication, tel qu'on le trouve dans les *Comptes rendus* (tome XX, page 1386) :

« La première question dont je désire entretenir l'Académie est relative à l'équilibre de la chaleur dans un ellipsoïde homogène. On donne les températures à la surface; ces températures, fixes pour chaque point, varient d'un point à l'autre suivant une loi quelconque, et il faut en déduire les valeurs des températures permanentes pour les points intérieurs. On sait que, pour résoudre ce problème, M. Lamé a fait usage de coordonnées ou variables particulières, et a introduit en analyse certaines fonctions très-remarquables, dont chacune ne dépend que d'une seule des variables [*]. J'ai eu depuis, dans d'autres circonstances, occasion de me servir de ces mêmes fonctions dont j'ai reconnu toute l'utilité. Quelques propriétés importantes que je leur ai trouvées permettent, en effet, de traiter avec succès diverses questions qu'auparavant on aurait pu regarder comme presque inabordables. M. Lamé, par son travail, a ainsi préparé, pour les géomètres, de puissantes ressources dont ils doivent être reconnaissants. Mais il est curieux de remarquer que, loin d'avoir simplifié la solution de la question spéciale à laquelle était consacré ce travail même (origine d'une féconde théorie), la marche savante suivie par l'auteur l'a, au contraire, compliquée beaucoup.

---

[*] *Voyez* le tome IV de ce Journal, page 126.

» Pour arriver, en effet, sans aucun artifice ni principe nouveau, à la solution demandée, observons qu'à chaque point de l'ellipsoïde on peut faire correspondre un point d'une surface sphérique de rayon égal à l'unité, les coordonnées rectangles du second point étant égales à celles du premier, respectivement divisées chacune par le demi-axe de l'ellipsoïde qui lui est parallèle. Ainsi la fonction donnée qui représente la loi des températures à la surface de l'ellipsoïde peut être regardée comme une fonction des deux angles qui déterminent la position d'un point sur la surface de la sphère. Par suite, elle peut être développée en une série $Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_n + \ldots$ ou ΣY_n du genre de celles de Laplace. Le terme général Y_n de cette série si connue peut, d'ailleurs, s'exprimer par une fonction entière, du degré n, des coordonnées rectangulaires x, y, z, relatives à la surface de l'ellipsoïde. Enfin, il est aisé de voir qu'on peut trouver un polynôme V_n, aussi de degré n, qui satisfasse à la fois à l'équation indéfinie

$$\frac{d^2 V_n}{dx^2} + \frac{d^2 V_n}{dy^2} + \frac{d^2 V_n}{dz^2} = 0$$

pour tout point de l'espace, et à la condition $V_n = Y_n$ à la surface. La formule générale des températures sera dès lors $u = \Sigma V_n$.

» Non-seulement cette solution est bien plus simple que celle de M. Lamé, mais, en outre, on peut aisément démontrer la convergence des séries employées, ce que M. Lamé n'a pas même essayé de faire, sans doute à cause de la complication de sa formule finale, qui pourtant au fond doit revenir et revient en effet à la nôtre. Voici à ce sujet une méthode générale, qui repose, en quelque sorte, sur une idée physique. Dans l'intérieur de notre ellipsoïde, la température permanente d'un point quelconque ne peut être évidemment ni un *maximum* ni un *minimum;* dans le premier cas elle diminuerait, et dans le second elle augmenterait par l'action des points environnants. Le *maximum* et le *minimum* ne peuvent être qu'à la surface, en sorte que les températures extrêmes qui y ont lieu servent de limites aux températures des points intérieurs. Or, soit pour un moment $Y_n + Y_{n+1} + \ldots + Y_{n+m}$ la loi des températures à la surface; la loi dans l'intérieur sera alors $V_n + V_{n+1} + \ldots + V_{n+m}$, et les valeurs de cette dernière quantité seront, d'après ce qu'on vient de dire, toutes comprises entre le *maximum* et le *minimum* de la première. Mais pour $n = \infty$, celle-ci est toujours infiniment petite, puisque la série ΣY_n est convergente; donc il en est de même de l'autre, et, par conséquent, la série ΣV_n est aussi convergente.

» Ce mode de démonstration, qu'il est aisé de présenter d'une manière purement analytique, est applicable à des corps de forme quelconque homogènes ou non; on peut même le généraliser et s'en servir pour prouver la convergence d'une foule d'expressions relatives à des intégrales d'équations linéaires ou même non linéaires très-différentes de celle qu'on vient de considérer.

» Ajoutons ici quelques mots pour éclaircir ce qui concerne les séries de M. Lamé. En regardant comme ne formant qu'un seul terme l'ensemble des termes de ces séries qui répondent dans le Mémoire de l'auteur à une même valeur de la lettre n, mais à différentes valeurs de B, et en faisant encore usage d'une sphère auxiliaire, on reconnaît d'abord qu'à la surface de l'ellipsoïde le développement employé par M. Lamé ne diffère pas au fond du développement ΣY_n de Laplace. Ainsi à la surface, la convergence a lieu pour la nouvelle série comme pour l'ancienne. Dans l'intérieur, elle a donc aussi lieu *à fortiori*, d'après le théorème général établi plus haut.

» Le caractère propre de l'analyse de M. Lamé consiste dans la décomposition en une somme de produits EE_1E_2 (où chaque facteur ne dépend que d'une seule variable) de l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

Mais les premières applications que j'en ai faites m'ont bien vite appris qu'il est indispensable de joindre aux fonctions E, E_1, E_2, une quatrième fonction qui satisfait à la même équation différentielle que E, mais qui est moins simple, puisqu'elle dépend d'intégrales elliptiques, tandis que E s'exprime algébriquement. Cette quatrième fonction se présente dans la question même que M. Lamé a traitée, dès qu'au lieu de rechercher la loi des températures permanentes dans l'intérieur de l'ellipsoïde, on recherche cette loi à l'extérieur, en regardant l'espace entier comme rempli d'une matière homogène. La fonction E ne peut plus être employée alors, et on doit la remplacer par celle que nous indiquons. C'est, du reste, sur l'emploi de cette fonction nouvelle que reposent les plus importants des théorèmes auxquels je suis parvenu, et en particulier ceux qui, se rapportant au développement du radical par lequel on exprime l'inverse de la distance de deux points, conduisent à une théorie des sphéroïdes elliptiques ou presque elliptiques analogue à celle des sphéroïdes presque sphériques de la *Mécanique céleste*.

» Par exemple, on résout sans peine, pour un ellipsoïde quelconque, le problème de M. Gauss, relatif à la distribution, sur la surface, d'une matière attractive ou répulsive, avec la condition qu'en chaque point de cette surface le *potentiel* ait une valeur donnée. »

Relativement au problème de M. Gauss, on trouvera quelques développements dans la Note suivante que j'ai présentée à l'Académie dans la séance du 2 juin [*] :

« Dans la communication que j'ai eu l'honneur de faire dernièrement à l'Académie, j'ai dit qu'à l'aide de certaines formules auxquelles je suis arrivé, on résout sans peine pour un ellipsoïde quelconque le problème de M. Gauss relatif à la distribution, sur la surface, d'une matière attractive ou répulsive, avec la condition que le *potentiel* ait en chaque point de la surface une valeur donnée. On m'a engagé depuis à entrer sur ce sujet dans quelques détails; je vais donc transcrire ici ma formule que j'emprunte, du reste, à une Note présentée il y a déjà longtemps au Bureau des Longitudes.

» Soient $d\omega$ un élément de la surface de l'ellipsoïde, et λ la densité de la distribution en ce point; désignons par Δ la distance de l'élément $d\omega$ à un autre élément quelconque $d\omega'$, pour lequel λ se change en λ'. D'après le sens que M. Gauss (après l'habile géomètre anglais G. Green) attache au mot *potentiel*, l'intégrale double

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta}$$

[*] *Comptes rendus*, tome XX, page 1609.

exprimera la valeur du potentiel pour un point de $d\omega$. Il s'agit donc de déterminer λ de telle sorte qu'on ait

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = Q,$$

Q étant une fonction donnée à volonté pour chaque élément $d\omega$.

» Bien qu'on puisse se passer, si l'on veut, des *coordonnées elliptiques* de M. Lamé, nous nous en servirons pour donner une forme plus nette et plus précise à la solution. Cela nous permettra d'ailleurs d'abréger cet article en adoptant tout d'abord les notations dont notre confrère a fait usage dans son Mémoire : *Sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux* [*]. Mais aux fonctions E, E_1, E_2, que M. Lamé considère, et qui dépendent respectivement des trois variables ρ, ρ_1, ρ_2, nous ajouterons une quatrième fonction S, qui dépendra, comme E, de ρ seulement, et satisfera à la même équation différentielle que E; en voici l'expression :

$$S = (2n+1) E \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{E^2 \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

De plus, nous représenterons par l le quotient obtenu en divisant par le produit $\rho \sqrt{\rho^2 - b^2} \sqrt{\rho^2 - c^2}$ des trois demi-axes de l'ellipsoïde qui nous occupe, la perpendiculaire abaissée du centre de cet ellipsoïde sur le plan tangent correspondant à l'élément $d\omega$. Cela posé, je trouve

$$\lambda = \frac{l}{4\pi} \sum \frac{(2n+1) E_1 E_2 \int\int l Q E_1 E_2 d\omega}{E S \int\int l E_1^2 E_2^2 d\omega},$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les couples E, E_1, E_2, S, c'est-à-dire aux valeurs successives $0, 1, 2, 3, \ldots$, de n, ainsi qu'aux valeurs de B qui répondent à chaque entier n. On peut mettre cette valeur de λ sous une autre forme en faisant intervenir le développement de Q suivant les

---

[*] Tome IV de ce Journal, page 126. Ajoutons toutefois que ces notations ne paraissent pas devoir être conservées; ainsi, au lieu de $\rho, \rho_1, \rho_2, E, E_1, E_2$, je proposerais d'écrire respectivement ρ, μ, ν, R, M, N, réservant les indices pour distinguer entre elles les diverses fonctions R, ou les diverses fonctions M ou N.

produits $E_1 E_2$. Soit

$$Q = \sum A E_1 E_2;$$

on aura

$$\lambda = \frac{l}{4\pi} \sum \frac{(2n+1) A E_1 E_2}{ES}.$$

Telle est la fonction λ pour laquelle

$$\int\int \frac{\lambda' d\omega'}{\Delta} = Q.$$

» Si l'on prend en particulier $Q = E_1 E_2$, et qu'on marque d'un accent les quantités qui se rapportent à l'élément $d\omega'$, il vient simplement

$$\int\int \frac{l' E'_1 E'_2 \, d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi E S E_1 E_2}{2n+1},$$

formule élégante et très-digne de l'attention des géomètres. Dans cette formule, Δ désigne la distance d'un point de l'élément $d\omega'$ à un autre point situé sur le même ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

Mais, s'il s'agissait de deux points $(\rho', \rho'_1, \rho'_2)$, (ρ, ρ_1, ρ_2), dont le premier appartiendrait encore à $d\omega'$, mais qui seraient (à cause de ρ différent de ρ') situés sur deux ellipsoïdes homofocaux différents, on aurait

$$\int\int \frac{l' E'_1 E'_2 d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi E' S E_1 E_2}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho > \rho'.$$

et

$$\int\int \frac{l' E'_1 E'_2 d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi E S' E_1 E_2}{2n+1}, \quad \text{pour} \quad \rho < \rho'.$$

» Les démonstrations de ces divers résultats sont on ne peut plus simples. Ajoutons que le produit $E_1 E_2$ (ou si l'on veut $l E_1 E_2$) jouit de propriétés fort curieuses dont plusieurs se rapportent à des *maxima* et *minima*. Au reste, ces propriétés ne sont pas bornées à l'ellipsoïde, et encore moins tiennent-elles aux coordonnées que nous venons d'employer; elles s'étendent à des surfaces quelconques. On les déduit de la considération de certaines fonctions ζ ou ζ' relatives aux éléments $d\omega$ ou $d\omega'$ de la surface dont on s'occupe. En désignant par l et l' la densité de la distribution d'une couche électrique en équilibre sur la surface, de telle sorte que Δ étant la distance de $d\omega$ à $d\omega'$, on ait

$$\int\int \frac{l'\,d\omega'}{\Delta} = \text{constante},$$

les fonctions ζ, dont nous parlons, sont définies par des équations de la forme

$$\int\int \frac{l'\,\zeta'\,d\omega'}{\Delta} = m\zeta,$$

m étant une constante qui change lorsqu'on passe d'une des fonctions ζ à une autre.

» D'après l'étude que j'en ai faite, je n'hésite pas à regarder les fonctions ζ comme étant de la plus haute importance en analyse. Mais ce n'est pas incidemment qu'il convient de traiter ce sujet difficile. Je me propose d'y revenir bientôt dans une communication spéciale. »