JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Construction des rayons de courbure des courbes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 204-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__204_0>

Construction des rayons de courbure des courbes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan;

Par M. CHASLES.

Une courbe plane étant en mouvement dans son plan, déterminer les rayons de courbure de la courbe enveloppe de l'espace parcouru par cette courbe.

La courbe peut se réduire à un point; la question devient celle-ci : *Une figure plane étant en mouvement dans son plan, déterminer les rayons de courbure de la courbe décrite par un point de cette figure.*

La solution de cette question particulière sera comprise dans celle de la question générale, où il suffira de supposer que le rayon de courbure de la courbe mobile est nul. Ne nous occupons donc que de la question générale.

Le mouvement de la figure mobile est, comme on sait, une suite de rotations infiniment petites, autour de points fixes, qu'on a appelés *centres instantanés de rotation.* Ces points forment une courbe sur le plan fixe sur lequel glisse la figure. Et si l'on conçoit que chaque point de cette courbe, au moment où il est le centre de la rotation, imprime sa trace sur le plan mobile de la figure, ces traces successives formeront une seconde courbe mobile avec la figure. Il est aisé de voir que cette seconde courbe roule librement sur la première, car la rotation autour de leur point commun actuel a pour effet de faire coïncider le point suivant de la courbe mobile avec le point suivant de la courbe fixe. De là on conclut que :

Tout mouvement d'une figure plane dans son plan est toujours un mouvement de roulement d'une certaine courbe sur une autre courbe fixe.

Nous appellerons, suivant une dénomination ancienne, la courbe mobile *roulette*, et la courbe fixe la *base de la roulette*.

C'est la considération de ces deux courbes, la *roulette* et sa *base*, qui va nous servir pour résoudre le problème énoncé. Désignons la base par B, et la roulette par A. Celle-ci emporte, dans son mouvement, une courbe C; et c'est le rayon de courbure de la courbe enveloppe de l'espace parcouru par cette courbe C, que nous voulons construire à un instant quelconque du mouvement. Il est clair que pour cela nous pouvons substituer aux deux courbes A et B leurs cercles osculateurs, en leur point de contact à cet instant. De sorte que la question se réduit à celle-ci : *Un cercle* A *roulant librement sur un cercle fixe* B, *on demande de déterminer le rayon de courbure de la courbe enveloppe de l'espace parcouru par une courbe* C *mobile avec le cercle* A. Or cette question a été traitée par M. Savary dans ses Leçons sur les engrenages [*]. Soient R, R' les rayons des deux cercles A et B; γ le centre de courbure de la courbe mobile C en son point de contact avec sa courbe enveloppe; γ' le centre de courbure de cette courbe enveloppe au même point de contact; m le point de contact des deux cercles. On sait par le théorème général du centre instantané de rotation, et même par le théorème particulier de Descartes [**], que la normale commune à la courbe C et à sa courbe enveloppe E, passe par ce point m. Soit φ l'angle que cette droite fait avec la normale commune aux deux cercles. La construction de M. Savary est exprimée par la relation suivante, entre les deux segments γm, $\gamma' m$ et les rayons des deux cercles,

$$\left(\frac{1}{\gamma m} \pm \frac{1}{\gamma' m}\right) \cos \varphi = \frac{1}{\mathrm{R}} \pm \frac{1}{\mathrm{R}'} \text{ [***]}.$$

Cette équation nous fera connaître $\gamma' m$, et, par conséquent, le centre de courbure de la courbe enveloppe E, si l'on connaît la *somme* ou *différence* $\left(\frac{1}{\mathrm{R}} \pm \frac{1}{\mathrm{R}'}\right)$ des valeurs inverses des rayons de courbure des

---

[*] Il a été fait, d'après la rédaction même de M. Savary, une lithographie de cette partie du Cours de Machines, professé à l'École Polytechnique.

[**] Voir *Aperçu historique*, etc., page 548.

[***] On peut consulter aussi le *Traité de Géométrie descriptive* de M. Leroy; deuxième édition, 1842, page 384.

deux courbes A et B. Ces deux rayons de courbure ne nous sont pas connus, mais leur *somme* ou *différence* peut être déterminée par les conditions du mouvement de la figure.

Nous supposerons que le mouvement de la figure soit produit par le glissement de deux courbes mobiles sur deux courbes fixes; ce qui comprend beaucoup de cas, car chacune de ces courbes fixes ou mobiles peut se réduire soit à une ligne droite, soit à un point. Soient D l'une des courbes mobiles, et F la courbe fixe sur laquelle elle glisse. Soient ε, ε' les centres de courbure de ces deux courbes, ψ l'angle que leur normale commune en leur point de contact fait avec la normale commune aux deux courbes A et B; la courbe fixe F peut être considérée comme l'enveloppe de l'espace parcouru par la courbe D, de sorte qu'on a, d'après l'équation précédente,

$$\left(\frac{1}{\varepsilon m} \pm \frac{1}{\varepsilon' m}\right) \cos\psi = \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}.$$

On a donc

$$\left(\frac{1}{\gamma m} \pm \frac{1}{\gamma' m}\right) \cos\varphi = \left(\frac{1}{\varepsilon m} \pm \frac{1}{\varepsilon' m}\right) \cos\psi.$$

Or, les segments εm, $\varepsilon' m$ et γm sont connus, puisque ce sont les distances des centres de courbure de trois courbes données, au *centre instantané de rotation;* cette équation fera donc connaître le segment $\gamma' m$ et conséquemment le centre de courbure de la courbe enveloppe E, pourvu toutefois que l'on connaisse la normale commune aux deux courbes A et B qui roulent l'une sur l'autre, puisque les angles φ et ψ se rapportent à cette normale.

Ainsi la question se trouve ramenée à celle-ci : *Construire les normales à la courbe lieu des centres instantanés de rotation, dans le mouvement d'une figure.*

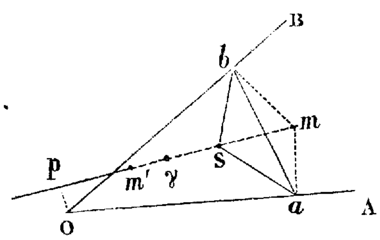
L'équation précédente nous donne elle-même la solution de cette question. En effet, nous avons supposé que le mouvement de la figure est produit par le glissement des deux courbes D, D' sur deux courbes fixes F, F'. ε, ε' et ψ se rapportent aux deux courbes D et F; supposons que γ, γ' et φ se rapportent de même aux deux autres courbes D', F'; et écrivons

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \left(\frac{1}{\varepsilon m} \pm \frac{1}{\varepsilon' m}\right) : \left(\frac{1}{\gamma m} \pm \frac{1}{\gamma' m}\right).$$

Le deuxième membre est connu, et le premier exprime le rapport des cosinus des angles que la normale à la courbe lieu des centres instantanés de rotation fait avec les normales aux deux courbes fixes, lesquelles normales sont précisément celles qui déterminent par leur intersection la position actuelle du centre instantané de rotation. Ainsi la normale cherchée se trouve déterminée, et le problème que nous nous sommes proposé est résolu complétement et d'une manière très-générale.

Nous avons considéré les deux courbes A, B, dont la première est mobile et roule sur la seconde, dans le mouvement de la figure, et nous avons déterminé leur normale commune; mais nous n'avons pas eu besoin de construire ces courbes. Du reste, cette construction est facile. La courbe fixe B est le lieu des centres instantanés de rotation. On détermine ces points, comme on sait, par l'intersection de deux normales. Pour construire la courbe A, on supposera que la figure mobile soit fixe, et que la figure fixe qui sert à diriger son mouvement devienne mobile, comme je l'ai dit dans mon *Aperçu historique* (Note XXXIV, page 410), et l'on construira la courbe lieu des centres instantanés de rotation dans ce second mouvement; ce sera la courbe A.

Si l'on applique la construction précédente des rayons de courbure au cas de l'ellipse décrite par le sommet S d'un triangle mobile Sab dont les deux autres points a, b glissent sur deux droites fixes OA, OB, on arrive à ce résultat : m étant le centre instantané de rotation, et con-



séquemment mS la normale à l'ellipse, si l'on prend Sm' = Sm, le centre de courbure γ sera le point conjugué harmonique du pied p de la perpendiculaire abaissée du point O sur la normale Sm', par rapport aux deux points m et m'.

On reconnaît aisément que le segment Sm est toujours égal au demi-diamètre conjugué à celui qui passe par le point S. De sorte qu'on a ce théorème :

Si sur la normale en un point S *d'une ellipse on porte, de part et d'autre de ce point, deux segments égaux au demi-diamètre conjugué à celui qui aboutit à ce point, puis, qu'on prenne sur cette même normale le pied de la perpendiculaire qui lui est abaissée du centre de la courbe, le centre du cercle osculateur au point* S *sera le conjugué harmonique de ce point, par rapport aux extrémités des deux segments.*

Cette construction fournit immédiatement l'expression du rayon de courbure donnée par M. Charles Dupin dans ses *Développements de Géométrie*.