JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. BRASSINNE

Note sur la transformation et l'intégration d'une classe d'équations différentielles simultanées à plusieurs variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 194-203.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__194_0>

NOTE

Sur la transformation et l'intégration d'une classe d'équations différentielles simultanées à plusieurs variables;

PAR M. E. BRASSINNE,
Professeur à l'École d'Artillerie de Toulouse.

1. La transformation des coordonnées est fréquemment employée, dans l'application de l'algèbre à la géométrie, pour ramener à des formes simples les équations des lignes courbes et des surfaces courbes; des transformations et des simplifications analogues ont lieu pour une classe d'équations différentielles d'une forme très-générale, dont l'étude fait le sujet de cette Note.

Considérons un système de n équations simultanées du second ordre de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + m.\psi(s)\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + k'\,\varphi(s) = 0,\\
&\frac{d^2y}{dt^2} + m.\psi(s)\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + k''\,\varphi(s) = 0,\\
&\frac{d^2z}{dt^2} + m.\psi(s)\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dz}{dt} + k'''\,\varphi(s) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d^2u}{dt^2} + m.\psi(s)\frac{ds}{dt}\cdot\frac{du}{dt} + k^{(n)}\varphi(s) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations renferment $(n+1)$ variables $x, y, z, \ldots, u, t$; les n premières sont regardées comme fonctions de la dernière t; on suppose, de plus, que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + \ldots + du^2},$$

et que, par conséquent,

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + \ldots + du^2};$$

$\psi(s)$ et $\varphi(s)$ sont des fonctions quelconques de s.

Nous allons prouver que les équations (1) peuvent se ramener à un groupe de même forme, mais dans lequel les $(n-1)$ premières équations seront privées de leur dernier terme. Pour arriver à ce résultat, nous supposerons

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a'x' + b'y' + c'z' + \ldots + h'u', \\ y = a''x' + b''y' + c''z' + \ldots + h''u', \\ z = a'''x' + b'''y' + c'''z' + \ldots + h'''u', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u = a^{(n)}x' + b^{(n)}y' + c^{(n)}z' + \ldots + h^{(n)}u'. \end{array} \right.$$

Disposons de $h', h'', h''', \ldots, h^{(n)}$, de telle sorte que

$$k' = \mathrm{R}h', \quad k'' = \mathrm{R}h'', \quad k''' = \mathrm{R}h''', \ldots, \quad k^{(n)} = \mathrm{R}h^{(n)}, \ldots;$$

il suffira pour cela de faire

$$\mathrm{R} = \sqrt{k'^2 + k''^2 + k'''^2 + \ldots + k^{(n)2}},$$

et

$$h' = \frac{k'}{\mathrm{R}}, \quad h'' = \frac{k''}{\mathrm{R}}, \ldots, \quad h^{(n)} = \frac{k^{(n)}}{\mathrm{R}},$$

d'où il résultera que

$$h'^2 + h''^2 + \ldots + h^{(n)2} = 1.$$

Les valeurs de $h', h'', h''', \ldots, h^{(n)}$ étant fixées, il restera, dans les équations (2), $n(n-1)$ quantités

$$a', b', c', \ldots, \quad a'', b'', c'', \ldots, \quad a^{(n)}, b^{(n)}, c^{(n)}, \ldots$$

arbitraires; pour les déterminer, prenons d'abord d'autres quantités

$$a_1, b_1, c_1, \ldots, \quad a_2, b_2, c_2, \ldots, \quad a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)}, \ldots$$

qui satisfassent aux $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions suivantes:

$$
\begin{array}{l}
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = 0, \\
a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_n c_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_n c_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_1 h' + a_2 h'' + \ldots + a_n h^{(n)} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_1 h' + c_2 h'' + \ldots + c_n h^{(n)} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Les premiers termes de ces $\frac{n(n-1)}{2}$ équations sont les produits distincts deux à deux des n lettres a_1, b_1, $c_1, \ldots$, h'. Les termes suivants ne diffèrent des premiers que par le nombre d'accents. Les équations précédentes renfermant $n(n-1)$ arbitraires, puisque les valeurs de h', h'', $h''', \ldots$, $h^{(n)}$ ont été assignées; on pourra donc se donner $\frac{n(n-1)}{2}$ de ces quantités, et si l'on fait un choix convenable, les $\frac{n(n-1)}{2}$ indéterminées restantes dépendront de la résolution d'un système d'équations du premier degré. Ces calculs effectués, on prendra

$$
\begin{array}{lll}
a' = \mathrm{L}\, a_1, & a'' = \mathrm{L}\, a_2, \ldots, & a^{(n)} = \mathrm{L}\, a_{(n)}, \\
b' = \mathrm{L}'\, b_1, & b'' = \mathrm{L}'\, b_2, \ldots, & b^{(n)} = \mathrm{L}'\, b_{(n)}, \\
c' = \mathrm{L}''\, c_1, & c'' = \mathrm{L}''\, c_2, \ldots, & c^{(n)} = \mathrm{L}''\, c_{(n)}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

en faisant

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{L} = \dfrac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{(n)}^2}}, \\
\mathrm{L}' = \dfrac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_{(n)}^2}}, \\
\mathrm{L}'' = \dfrac{1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \ldots + c_{(n)}^2}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

En vertu de ces hypothèses, les coefficients

$$a', \; b',\ldots, \; h', \quad a'', \; b'',\ldots, \; h'',\ldots, \quad a^{(n)}, \; b^{(n)},\ldots, \; h^{(n)},$$

satisferont aux équations de condition suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} a'b' + a''b'' + \ldots + a^{(n)}b^{(n)} = 0, \\ a'c' + a''c'' + \ldots + a^{(n)}c^{(n)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'h' + a''h'' + \ldots + a^{(n)}h^{(n)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'^2 + a''^2 + \ldots + a^{(n)2} = 1, \\ b'^2 + b''^2 + \ldots + b^{(n)2} = 1, \\ c'^2 + c''^2 + \ldots + c^{(n)2} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h'^2 + h''^2 + \ldots + h^{(n)2} = 1, \end{cases}$$

qui sont au nombre de $\frac{n(n+1)}{2}$.

Les coefficients étant ainsi déterminés, on aura évidemment

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + u^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + \ldots + u'^2$$

et

$$dx^2 + dy^2 + \ldots + du^2 = dx'^2 + dy'^2 + \ldots + du'^2,$$

ou bien

$$ds^2 = ds'^2,$$

et, par suite,

$$s = s'.$$

Remplaçons actuellement, dans le système des équations (1), x, y, z,..., u par leurs valeurs fournies par le groupe (2), et, après la substitution, ajoutons les équations différentielles transformées, en multipliant la première par a', la deuxième par a'', la troisième par a''',..., la dernière par $a^{(n)}$; ajoutons-les de nouveau, après avoir multiplié la première par b', la deuxième par b'',..., la dernière par $b^{(n)}$, etc. On trouvera, en tenant compte des équations de condition (3), les transformées suivantes :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2x'}{dt^2} + m.\psi(s')\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dx'}{dt} = 0,\\
&\frac{d^2y'}{dt^2} + m.\psi(s')\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dy'}{dt} = 0,\\
&\frac{d^2z'}{dt^2} + m.\psi(s')\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dz'}{dt} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d^2u'}{dt^2} + m.\psi(s')\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{du'}{dt} + \mathrm{R}\,\varphi(s') = 0.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on peut intégrer $\psi(s')\,ds'$, les $(n-1)$ premières équations du groupe (4) conduiront à des intégrales premières de la forme

$$\frac{dx'}{dt} = \mathrm{A}e^{-m\mathrm{F}(s')},\quad \frac{dy'}{dt} = \mathrm{B}e^{-m\mathrm{F}(s')},\ldots,$$

$\mathrm{F}(s')$ étant l'intégrale de $\psi(s')\,ds'$. Pour ne pas donner trop d'étendue à des transformations purement analytiques qui s'appliqueraient, comme il serait facile de le voir, à d'autres systèmes d'équations différentielles d'un ordre supérieur au second, nous nous contenterons de montrer l'utilité de notre transformation dans deux exemples; le second sera choisi dans la théorie du mouvement des projectiles.

2. Considérons les trois équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + m.\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + k'\,e^{-ns} = 0,\\
&\frac{d^2y}{dt^2} + m.\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + k''\,e^{-ns} = 0,\\
&\frac{d^2z}{dt^2} + m.\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dz}{dt} + k'''\,e^{-ns} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Posons

$$\begin{aligned}
x &= a'x' + b'y' + c'z',\\
y &= a''x' + b''y' + c''z',\\
z &= a'''x' + b'''y' + c'''z'.
\end{aligned}$$

Faisons

$$k' = \mathrm{R}c', \quad k'' = \mathrm{R}c'', \quad k''' = \mathrm{R}c''',$$

R étant égal à $\sqrt{k'^2 + k''^2 + k'''^2}$.

Déterminons six quantités $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$, au moyen des trois conditions

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0, \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0, \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on se donne les quantités a_2, a_3, b_3, les autres inconnues a_1, b_1, b_2 dépendront d'équations du premier degré; on prendra ensuite pour a', a'', a''' les valeurs

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

et pour b', b'', b''',

$$\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad \frac{b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Cela fait, on parviendra par substitution, après les artifices de calcul indiqués ci-dessus, aux trois équations,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2x'}{dt^2} + m.\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dx'}{dt} = 0, \\ &\frac{d^2y'}{dt^2} + m.\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dy'}{dt} = 0, \\ &\frac{d^2z'}{dt^2} + m.\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dz'}{dt} + \mathrm{R}e^{-ns'} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux premières donnent, par l'intégration,

$$(3) \qquad \frac{dx'}{dt} = \mathrm{A}e^{-ms'}, \quad \frac{dy'}{dt} = \mathrm{B}e^{-ms'}, \quad \text{d'où} \quad dy' = \mathrm{C}dx'.$$

Regardant z' comme fonction de x' seul, puisque, d'après les formules (3), y' peut s'exprimer au moyen de x', on posera

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz'}{dx'}\cdot\frac{dx'}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{dz'}{dt} = p'\,\frac{dx'}{dt},$$

en nommant p' le rapport $\frac{dz'}{dx'}$. La substitution dans la troisième équation du groupe (2) fournit, en ayant égard aux deux premières équations de ce groupe,

$$\frac{dx'}{dt}\cdot\frac{dp'}{dt} = -\mathrm{R}e^{-ns'};$$

divisant celle-ci par le carré de la première des équations (3), on aura

$$(4) \qquad \frac{dp'}{dx'} = -\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}^2}\,e^{(2m-n)s'}.$$

Mais

$$ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2} = dx'\sqrt{1 + \mathrm{C}^2 + p'^2}.$$

Multipliant les deux membres de l'équation (4) par cette valeur de ds', on aura

$$dp'\sqrt{1 + \mathrm{C}^2 + p'^2} = -\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}^2}\,e^{(2m-n)s'}\,ds',$$

qui, intégrée, donne

$$(1+\mathrm{C}^2)\left[\frac{p'}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2}}\sqrt{1+\frac{p'^2}{1+\mathrm{C}^2}} + \log\left(\frac{p'}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2}} + \sqrt{1+\frac{p'^2}{1+\mathrm{C}^2}}\right)\right]$$
$$= \gamma - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}^2(2m-n)}\,e^{(2m-n)s'},$$

γ étant la constante arbitraire. Éliminant, dans cette dernière, l'exponentielle au moyen de l'équation (4), on trouvera

$$dx' = \frac{dp'}{(2m-n)(1+\mathrm{C}^2)\left[\frac{p'}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2}}\sqrt{1+\frac{p'^2}{1+\mathrm{C}^2}} + \log\left(\frac{p'}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2}} + \sqrt{1+\frac{p'^2}{1+\mathrm{C}^2}}\right)\right]};$$

dy' vaudra ensuite $\mathrm{C}dx'$, et dz' vaudra $p'dx'$; remplaçant x', y', z' par leurs valeurs

$$x' = a'x + a''y + a'''z,$$
$$y' = b'x + b''y + b'''z,$$
$$z' = c'x + c''y + c'''z,$$

et exprimant ensuite $\frac{dz'}{dx'}$ en fonction de $\frac{dz}{dx}$, que l'on appellerait p, l'intégration des équations (1) sera ramenée aux quadratures.

3. Supposons qu'il s'agisse de trouver le mouvement d'un projectile soumis à la résistance de l'air et à l'action du vent, que nous regarderons comme une force accélératrice constante d'intensité et de direction. Si cette force agit dans le plan vertical de la trajectoire, elle se combinera avec la gravité, et, en admettant que la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse que le projectile possède à chaque instant, les équations du mouvement auront la forme

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + C.\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + k = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + C.\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + k' = 0.$$

Remplaçons, dans ces équations, k et k' par $m\cos\alpha$ et $m\sin\alpha$, m étant égal à $\sqrt{k^2 + k'^2}$ et $\tang\alpha$ étant égal à $\frac{k}{k'}$; posons ensuite

$$x = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \quad \text{et} \quad y = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha,$$

les équations (1) deviendront

$$-\frac{d^2x'}{dt^2}\sin\alpha + \frac{d^2y'}{dt^2}\cos\alpha$$
$$+ C.\frac{ds'}{dt}\left(-\frac{dx'}{dt}\sin\alpha + \frac{dy'}{dt}\cos\alpha\right) + m\cos\alpha = 0,$$
$$+\frac{d^2x'}{dt^2}\cos\alpha + \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\alpha$$
$$+ C.\frac{ds'}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\cos\alpha + \frac{dy'}{dt}\sin\alpha\right) + m\sin\alpha = 0,$$

puisque

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx'^2 + dy'^2} = ds'.$$

Multipliant la première équation par $\sin\alpha$, la deuxième par $\cos\alpha$, et soustrayant, on trouvera

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + C.\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dx'}{dt} = 0.$$

Multipliant ensuite la première équation par $\cos\alpha$, et la deuxième par $\sin\alpha$, et ajoutant, on trouvera

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + C.\frac{ds'}{dt}\cdot\frac{dy'}{dt} + m = 0.$$

Ces deux dernières équations, traitées par les méthodes connues (*voir* Poisson, *Mécanique*, deuxième édition, page 402), conduisent à

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{C}.dx' = \frac{dp'}{p'\sqrt{1+p'^2} + \log\left(p' + \sqrt{1+p'^2}\right) - \gamma'} \\ &\text{et} \\ &\mathrm{C}.dy' = \frac{p'dr'}{p'\sqrt{1+p'^2} + \log\left(p' + \sqrt{1+p'^2}\right) - \gamma'}; \end{aligned} \right.$$

ici r' désigne le rapport $\frac{dy'}{dx'}$. Mais, pour exprimer les coordonnées primitives ou leurs différentielles dx, dy en fonction du rapport $\frac{dy}{dx} = r$, nous observerons que

$$dx' = dy \cos\alpha - dx \sin\alpha \quad \text{et} \quad dy' = dy \sin\alpha + dx' \cos\alpha,$$

et, par suite,

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{p \sin\alpha + \cos\alpha}{p\cos\alpha - \sin\alpha}.$$

Substituant, dans la formule (2), pour p', dx', dy' leurs valeurs, et appelant $\mathrm{F}(r)\,dp$, $f(r)\,dp$ ce que deviennent les seconds membres, on aura visiblement

$$\begin{aligned} \mathrm{C}.dy &= \cos\alpha\,\mathrm{F}(r)\,dp + \sin\alpha\, f(r)\,dp, \\ \mathrm{C}.dx &= \cos\alpha\, f(r)\,dp - \sin\alpha\,\mathrm{F}(r)\,dp. \end{aligned}$$

La trajectoire aura, dans ce cas, une asymptote parallèle à l'axe des y', et faisant, par conséquent, avec l'axe des x, un angle $\pi - \alpha$.

4. Nous terminerons ce travail par quelques observations utiles dans la pratique de la balistique. On peut voir dans les Traités de Mécanique rationnelle, dans celui de Poisson par exemple (tome I^er, page 403), que pour toutes les lois de la résistance de l'air, on obtient la relation générale

$$\frac{dp\,.\,dx}{dt^2} = -g.$$

Si donc, pour les équations du mouvement d'un projectile, nous avons

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m\psi(s)\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + m\psi(s)\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + g = 0,$$

la première, pouvant s'intégrer une fois, donnera une valeur de dt qui, substituée dans la relation générale ci-dessus, conduira à l'équation différentielle de la trajectoire.

L'intégrale de cette équation s'obtiendra généralement lorsque, pour le tir sous de petits angles, nous supposerons

$$ds = dx.$$

Admettons, enfin, que la loi de la résistance de l'air est exprimée par deux termes de la forme

$$m\cdot\frac{ds^2}{dt^2}\cdot + n.\varphi(s)\cdot\frac{ds^3}{dt^2},$$

remplaçant pour de petits angles s par x; les équations différentielles du mouvement seront, dans cette hypothèse,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{dx^2}{dt^2} + n\varphi(x).\frac{dx^3}{dt^3} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \left[m\frac{dx^2}{dt^2} + n\varphi(x)\cdot\frac{dx^3}{dt^3}\right]\frac{dy}{dx} + g = 0.$$

La première, divisée par $\frac{dx^2}{dt^2}$ et multipliée par dt, s'intègre une fois et donne un résultat de la forme

$$dt - mt.dx + ndx\int\varphi(x)\,dx = 0,$$

équation linéaire du premier ordre, qui donnera t, et, par suite, dt en fonction de x. Cette valeur, substituée dans la relation générale

$$\frac{d\rho.dx}{dt^2} = -g,$$

conduira à une équation différentielle de la trajectoire, intégrable dans un grand nombre de cas, dans celui, par exemple, où $\varphi(x)$ sera une constante.