JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM ROBERTS

Application de la théorie des transcendantes elliptiques à la rectification d'une classe étendue de courbes planes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 177-193.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__177_0>

Application de la théorie des transcendantes elliptiques à la rectification d'une classe étendue de courbes planes;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. Si d'un point fixe on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes d'une courbe donnée, la position de la tangente en un point de la courbe qui est le lieu géométrique des pieds de ces perpendiculaires, peut être déterminée par la construction suivante.

Soient O le point fixe, et OQ la perpendiculaire abaissée de ce point sur la tangente en un point P de la courbe donnée; la tangente QR à la courbe lieu des points Q fera avec OQ un angle OQR égal à OPQ et situé d'un même côté de la tangente PQ.

Pour le démontrer, soient P et P′ deux points consécutifs de la courbe donnée, Q et Q′ les pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur les tangentes en ces points, QQ′ sera l'élément de la nouvelle courbe, et coïncidera, par suite, avec sa tangente; d'ailleurs le quadrilatère OQ′QP est inscriptible dans un cercle, et, par conséquent, l'angle OQQ′ est égal à OPQ′ ou à OPQ.

Il résulte de là que si r et ω désignent les coordonnées polaires d'un point de la courbe donnée, r_1 et ω_1 celles du point correspondant de la courbe *dérivée*, on aura

$$r\frac{d\omega}{dr} = r_1\frac{d\omega_1}{dr_1}.$$

2. Cela posé, concevons que l'on fasse dériver d'une courbe donnée quelconque, une série de courbes se succédant d'après la même loi, et proposons-nous de trouver une formule pour la rectification d'une quelconque des courbes de cette série.

Désignons par r et ω les coordonnées polaires d'un point quelconque de la courbe donnée, que nous appellerons courbe primitive, par r_n et ω_n celles de la courbe qui occupe le $n^{ième}$ rang dans la série des courbes dérivées, et par s_n l'arc de cette dernière courbe, on aura

$$ds_n = \left[1 + r_n^2\left(\frac{d\omega_n}{dr_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dr_n = \left(1 + r^2\frac{d\omega^2}{dr^2}\right)^{\frac{1}{2}} dr_n.$$

D'ailleurs, si θ désigne l'angle dont la tangente est $r\frac{d\omega}{dr}$ et qui est celui que forme la tangente à la courbe primitive avec le rayon vecteur r, on aura évidemment

$$r_n = r\sin^n\theta,$$

d'où

$$dr_n = \sin^n\theta\left(1 + nr\,\mathrm{cotang}\,\theta\frac{d\theta}{dr}\right)dr$$

$$= \frac{nr\frac{d^2\omega}{dr^2} + (n+1)\frac{d\omega}{dr} + r^2\frac{d\omega^3}{dr^3}}{\left(1 + r^2\frac{d\omega^2}{dr^2}\right)^{\frac{n+2}{2}}}\left(r\frac{d\omega}{dr}\right)^{n-1} rdr;$$

et, par conséquent,

$$(A)\qquad ds_n = \frac{nr\frac{d^2\omega}{dr^2} + (n+1)\frac{d\omega}{dr} + r^2\frac{d\omega^3}{dr^3}}{\left(1 + r^2\frac{d\omega^2}{dr^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\left(r\frac{d\omega}{dr}\right)^{n-1} rdr.$$

3. Concevons maintenant une courbe qui soit constamment touchée par les perpendiculaires menées aux extrémités des rayons vecteurs d'une courbe donnée; supposons que de cette nouvelle courbe on en fasse dériver une troisième par une méthode semblable de génération, et ainsi à l'infini, et proposons-nous de rectifier une quelconque des courbes de cette nouvelle série. Cela revient évidemment à exprimer la longueur de l'arc s de la courbe primitive, en fonction des coordon-

nées r_n, ω_n de la courbe dérivée d'ordre n; or on a

$$ds = \left(1 + r^2 \frac{d\omega^2}{dr^2}\right)^{\frac{1}{2}} dr = \left[1 + r_n^2 \left(\frac{d\omega_n}{dr_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dr,$$

et en désignant, comme précédemment, par θ l'angle dont la tangente est $r_n \frac{d\omega_n}{dr_n}$,

$$r = r_n \operatorname{cos\acute{e}c}^n \theta,$$

d'où l'on conclut, après quelques réductions,

$$ds = \frac{-nr_n \frac{d^2\omega_n}{dr_n^2} - (n-1)\frac{d\omega_n}{dr_n} + r_n^2 \frac{d^3\omega_n}{dr_n^3}}{\left(r_n \frac{d\omega_n}{dr_n}\right)^{n+1}} \left(1 + r_n^2 \frac{d\omega_n^2}{dr_n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} r_n dr_n.$$

4. Si l'on compare cette expression avec la valeur de ds_n écrite plus haut, on verra facilement que, pour rectifier une quelconque des courbes de la nouvelle série que nous venons de considérer, il suffira de changer le signe de n dans l'équation (A). Cette remarque suggère une notation que nous croyons convenable et expressive, et qui consiste à représenter par r_{-n}, ω_{-n}, s_{-n} les coordonnées polaires et l'arc de la $n^{ième}$ courbe de la série dérivée suivant la méthode du n° **3**; nous pouvons donc appeler ces courbes les courbes du système négatif, ou simplement les courbes *négatives*, en donnant le nom de courbes *positives* à celles obtenues par la construction que nous avons mentionnée en premier lieu.

5. Nous allons maintenant procéder à quelques applications de notre formule, et nous prendrons d'abord pour courbe primitive une ellipse ayant pour centre l'origine fixe. Si l'on prend pour unité le demi-grand axe de l'ellipse et que l'on représente par b et c le demi-petit axe et l'excentricité, on aura

$$b^2 + c^2 = 1,$$

et l'équation de l'ellipse sera

$$r\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \omega} = b,$$

l'angle ω étant compté à partir du petit axe : on déduit de là

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{b}{r\sqrt{(1-r^2)(r^2-b^2)}},$$

$$r\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{d\omega}{dr} = \frac{br(2r^2-1-b^2)}{[(1-r^2)(r^2-b^2)]^{\frac{3}{2}}};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (A), il vient, après quelques réductions,

$$\text{(B)} \qquad ds_n = \frac{nr^2-(n-1)(1+b^2-r^2)}{r^{n-1}(1+b^2-r^2)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{b^n\,dr}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-b^2)}}.$$

6. Si n est impair, le multiplicateur de dr dans le second membre de l'équation (B) est une fonction rationnelle de r^2, divisée par la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en r, ce qui montre que, dans ce cas, s_n appartient visiblement à la classe des fonctions elliptiques.

Afin de réduire l'expression de la différentielle ds_n à une forme semblable quel que soit n, posons

$$r^2 = b^2 + c^2\rho^2,$$

ρ étant une nouvelle variable dont les limites sont 0 et 1, nous aurons

$$\text{(C)} \qquad ds_n = \frac{n(b^2+c^2\rho^2)-(n-1)(1-c^2\rho^2)}{(b^2+c^2\rho^2)^{\frac{n}{2}}(1-c^2\rho^2)^{\frac{n}{2}}} \frac{b^n\,d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-c^2\rho^2)}}.$$

7. Supposons d'abord $n=0$, ce qui revient à considérer l'ellipse primitive elle-même; l'équation (C) donne, après avoir mis $\sin\varphi$ au lieu de ρ,

$$ds = \sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad \text{d'où} \quad s = \mathrm{E}(c,\varphi).$$

Pour $n=1$, l'équation (B) nous donne

$$ds_1 = \frac{br^2}{1+b^2-r^2}\frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-b^2)}};$$

d'ailleurs, de l'équation de l'ellipse on tire

$$\frac{r^2}{1+b^2-r^2} = \frac{b^2}{1-(1-b^4)\sin^2\omega},$$

et

$$\frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-b^2)}} = \frac{d\omega}{\sqrt{1-c^2\sin^2\omega}},$$

en sorte que l'on aura

$$ds_1 = \frac{b^3}{1-(1-b^4)\sin^2\omega}\,\frac{d\omega}{\sqrt{1-c^2\sin^2\omega}},$$

et, en employant la notation des transcendantes elliptiques,

$$s_1 = b^3\,\Pi(-1+b^4,\, c,\, \omega).$$

On déduit de là que l'arc de la première courbe positive, compté à partir de l'extrémité du petit axe, est exprimé par une fonction elliptique de troisième espèce à paramètre *circulaire*.

8. Supposons maintenant $n = 2$, l'équation (C) nous donne

$$ds_2 = \left(\frac{2}{1-c^2\rho^2} - \frac{1}{b^2+c^2\rho^2}\right)\frac{b^2\,d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-c^2\rho^2)}},$$

ou, en posant $\rho = \sin\varphi$,

$$ds_2 = \frac{2b^2 d\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1+\frac{c^2}{b^2}\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}};$$

d'où, en observant que

$$b^2\int\frac{d\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{E}(c,\varphi) - \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}},$$

$$s_2 = 2\,\mathrm{E}(c,\varphi) - \Pi\left(\frac{c^2}{b^2},\, c,\, \varphi\right) - \frac{2c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Legendre a démontré que deux fonctions de la troisième espèce ayant même module et même amplitude, et dont les paramètres n et $-m$ sont liés par la relation

$$(1+n)(1-m) = b^2,$$

où b désigne le complément du module c, peuvent s'exprimer l'une par l'autre, à l'aide de l'équation suivante [*] :

$$(1+b^2)\,\Pi\left(\frac{c^2}{b^2}, c, \varphi\right) - b^4\,\Pi(-1+b^4, c, \varphi) - b^2\,\mathrm{F}(c, \varphi)$$
$$= b\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{c^2\sqrt{1+b^2}\sin\varphi\cos\varphi}{b\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}},$$

où l'on fait

$$n = \frac{c^2}{b^2}, \quad -m = -1+b^4.$$

Il suit de là qu'on peut remplacer la fonction de troisième espèce, qui se trouve dans l'expression de l'arc de la seconde courbe positive, par une fonction identique par le paramètre et le module à celle qui donne la valeur de l'arc de la première courbe positive.

9. Soit $n = -1$, l'équation (B) donnera, en représentant par R la quantité $(1-r^2)(r^2-b^2)$,

$$b\,ds_{-1} = [2(1+b^2)r^2 - 3r^4]\frac{dr}{\sqrt{\mathrm{R}}}:$$

on a d'ailleurs

$$r\sqrt{\mathrm{R}} = -b^2\int\frac{dr}{\sqrt{\mathrm{R}}} + 2(1+b^2)\int\frac{r^2\,dr}{\sqrt{\mathrm{R}}} - 3\int\frac{r^4\,dr}{\sqrt{\mathrm{R}}},$$

ce qui donne

$$bs_{-1} = r\sqrt{\mathrm{R}} + b^2\int\frac{dr}{\sqrt{\mathrm{R}}}.$$

Si l'on y remplace r par sa valeur tirée de l'équation de l'ellipse, cette équation devient

$$s_{-1} = \frac{bc^2\sin\omega\cos\omega}{(1-c^2\sin^2\omega)^{\frac{3}{2}}} + b\,\mathrm{F}(c, \omega).$$

La courbe dont nous venons de nous occuper est celle dont M. Talbot a donné la rectification dans une Lettre adressée à M. Ger-

---

[*] LEGENDRE, *Traité des fonctions elliptiques*, tome I, chap. XV, page 54.

gonne, et insérée dans les *Annales de Mathématiques*, tome XIV, page 380. Legendre a aussi observé que l'arc de cette courbe fournit une représentation de la fonction elliptique de première espèce. (*Traité des fonctions elliptiques*, tome II, page 590.)

Si l'on fait $n = -2$, on aura

$$b^2\,ds_{-2} = (3 - 2b^2 - 5c^2\rho^2)(1 - c^2\rho^2)(b^2 + c^2\rho^2)\frac{d\rho}{\sqrt{P}},$$

en représentant, pour abréger, par P le polynôme $(1 - \rho^2)(1 - c^2\rho^2)$.

On a d'ailleurs

$$\rho^3\sqrt{P} = 3\int\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{P}} - 4(1 + c^2)\int\frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{P}} + 5c^2\int\frac{\rho^6 d\rho}{\sqrt{P}},$$

$$\rho\sqrt{P} = \int\frac{d\rho}{\sqrt{P}} - 2(1 + c^2)\int\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{P}} + 3c^2\int\frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{P}},$$

ce qui donne

$$ds_{-2} = \frac{c^4}{b^2}d(\rho^3\sqrt{P}) + c^2 d(\rho\sqrt{P}) + (1 + c^2 - 3c^2\rho^2)\frac{d\rho}{\sqrt{P}};$$

si l'on met $\sin\varphi$ au lieu de ρ, dans cette expression, et qu'on intègre ensuite, on aura

$$\begin{aligned} s_{-2} &= 3\mathrm{E}(c, \varphi) - (1 + b^2)\mathrm{F}(c, \varphi) \\ &+ c^2\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}. \end{aligned}$$

10. Si l'on représente par S le quadrant de l'ellipse, par S_{-1}, S_{-2} les quadrants des deux premières courbes du système négatif, on aura

$$\begin{aligned} S &= E, \\ S_{-1} &= bF, \\ S_{-2} &= 3E - (1 + b^2)F, \end{aligned}$$

d'où résulte la relation suivante entre les trois quadrants S, S_{-1}, S_{-2} :

$$(1 + b^2)S_{-1} = b(3S - S_{-2}).$$

On a vu, au n° **8**, que la longueur S_2 du quadrant de la seconde courbe positive est donnée par l'équation

$$S_2 = 2E - \Pi\left(\frac{c^2}{b^2}\right);$$

mais on a

$$(1 + b^2)\,\Pi\left(\frac{c^2}{b^2}\right) - b^4\,\Pi(-1 + b^4) - b^2 F = 0,$$

et, en vertu du n° **7**,

$$S_1 = b^3\,\Pi(-1 + b^4),$$

en sorte que l'on aura

$$b(S_1 + S_{-1}) = (1 + b^2)(2S - S_2).$$

On obtient encore aisément la relation suivante entre les quadrants de la courbe donnée et de ses deux premières dérivées, tant positives que négatives :

$$(S_{-1} + S_1)S_{-1} = (3S - S_{-2})(2S - S_2).$$

On voit qu'elle est indépendante de l'excentricité de la courbe primitive.

11. L'inspection des équations (B) et (C) nous montre que, pour toutes les valeurs négatives de n, la quantité qui multiplie $\frac{dr}{\sqrt{R}}$ ou $\frac{d\rho}{\sqrt{P}}$ sera une fonction rationnelle et entière de r^2 ou de ρ^2, en sorte que les arcs de toutes les courbes négatives s'exprimeront à l'aide des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce seulement, et par conséquent à l'aide des arcs de l'ellipse et de la première dérivée négative. Il n'en sera pas ainsi pour les valeurs positives de n; dans ce cas, s_n contiendra un terme de la forme

$$\int \frac{1}{1 + \frac{c^2}{b^2}\rho^2}\,\frac{d\rho}{\sqrt{P}}, \quad \text{ou} \quad \int \frac{1}{1 - (1 - b^4)\sin^2\omega}\,\frac{d\omega}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\omega}},$$

selon que n sera pair ou impair.

Ainsi que nous l'avons dit précédemment, la première de ces intégrales est réductible à la seconde qui exprime la valeur de s_1, d'où il résulte que la rectification de toutes les courbes positives dépend seulement de la rectification de l'ellipse et des deux premières courbes dérivées tant positives que négatives.

12. Nous considérerons maintenant l'hyperbole ayant pour centre l'origine fixe. Soient b le demi-axe imaginaire, c le demi-axe réel, l'excentricité étant prise pour unité, en sorte que

$$b^2 + c^2 = 1;$$

l'équation de l'hyperbole sera

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \omega}{c^2} - \frac{\sin^2 \omega}{b^2},$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{bc}{r\sqrt{r^2+b^2}\sqrt{r^2-c^2}},$$

$$r\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{d\omega}{dr} = -\frac{bcr(2r^2+b^2-c^2)}{[(r^2+b^2)(r^2-c^2)]^{\frac{3}{2}}}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (A) nous donne, après quelques réductions,

$$ds_n = \frac{nr^2+(n-1)(r^2+b^2-c^2)}{r^{n-1}(r^2+b^2-c^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,\frac{b^n c^n dr}{\sqrt{(r^2+b^2)(r^2-c^2)}}.$$

Cette formule montre que la rectification des courbes dérivées ne dépend que des fonctions elliptiques, si n est impair; si n est pair, nous poserons

$$r^2 + b^2 - c^2 = b^2c^2\rho^2,$$

et la valeur de ds_n sera

$$ds_n = \frac{(n-1)b^2c^2\rho^2 + n(b^2c^2\rho^2+c^2-b^2)}{\rho^n(b^2c^2\rho^2+c^2-b^2)^{\frac{n}{2}}}\,\frac{d\rho}{\sqrt{(b^2\rho^2+1)(c^2\rho^2-1)}}.$$

Cette seconde formule, que nous emploierons pour la rectification des dérivées d'ordres pairs, fait voir que cette rectification ne dépend non plus que des fonctions elliptiques.

Il est bon de remarquer que la nouvelle variable ρ que nous introduisons, est l'inverse de la perpendiculaire abaissée du centre de l'hyperbole sur la tangente à l'extrémité du rayon vecteur r.

13. Soit $n = 0$; en faisant $c\rho = \text{séc}\,\varphi$, on a

$$ds = \frac{b^2 d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}};$$

d'où, en intégrant,

$$s = \text{tang}\,\varphi\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi} + b^2 F(c, \varphi) - E(c, \varphi);$$

expression qui coïncide avec celle donnée par Legendre, pour l'arc d'hyperbole. (*Traité des fonctions elliptiques*, tome I, page 16.)

Soit $n = 1$, on aura

$$ds_1 = \frac{bcr^2}{r^2 + b^2 - c^2}\,\frac{dr}{\sqrt{(r^2 + b^2)(r^2 - c^2)}},$$

et, en posant $r = c\,\text{séc}\,\varphi$,

$$ds_1 = \frac{c^3}{b}\,\frac{1}{1 + \frac{c^2 - b^2}{b^2}\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - b^2\sin^2\varphi}};$$

d'où

$$s_1 = \frac{c^3}{b}\,\Pi\left(\frac{c^2 - b^2}{b^2}, b, \varphi\right).$$

Ce qui montre que l'arc de la première courbe dérivée positive est exprimé par une fonction elliptique de la troisième espèce, dont le paramètre est circulaire si l'on a $c > b$, c'est-à-dire si l'axe imaginaire est inférieur à l'axe réel. Si, au contraire, c est $< b$, ce paramètre appartient évidemment à la forme logarithmique fondamentale.

14. Soit $n = 2$, on aura

$$ds_2 = \left(\frac{b^2c^2}{b^2c^2\rho^2 + c^2 - b^2} + \frac{2}{\rho^2}\right)\frac{d\rho}{\sqrt{(b^2\rho^2 + 1)(c^2\rho^2 - 1)}};$$

et, en posant $c\rho = \text{séc}\,\varphi$, il vient, après quelques réductions,

$$s_2 = 2E(c, \varphi) - \frac{b^2(2b^2 - c^2)}{b^2 - c^2}F(c, \varphi) + \frac{b^4}{b^2 - c^2}\,\Pi\left(\frac{b^2 - c^2}{c^2}, c, \varphi\right).$$

On doit observer que la fonction de troisième espèce, qui entre dans cette expression, a un module complémentaire de celle qui donne la valeur de s_1, et que les conditions qui déterminent le caractère du paramètre comme circulaire ou logarithmique, sont, dans les deux cas, précisément opposées; on voit, en effet, que la fonction de troisième espèce, qui entre dans s_2, exprime la longueur de l'arc de la première dérivée positive de l'hyperbole conjuguée dont l'axe réel serait $2b$ et l'axe imaginaire $2c$.

En se reportant à la formule générale, on verra facilement que, dans l'hyperbole de même que dans l'ellipse, toutes les dérivées négatives auront leurs arcs exprimables par des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce seulement, ce qui n'a pas lieu pour les dérivées positives; car si n est positif, s_n contiendra, dans son expression, un terme de la forme

$$\int \frac{1}{r^2+b^2-c^2} \frac{dr}{\sqrt{(r^2+b^2)(r^2-c^2)}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{1}{b^2c^2\rho^2+c^2-b^2} \frac{d\rho}{\sqrt{(b^2\rho^2+1)(c^2\rho^2-1)}},$$

selon que n sera impair ou pair.

Ces intégrales ne sont autre chose que les fonctions de troisieme espèce

$$\Pi\left(\frac{b^2-c^2}{c^2},\, c,\, \varphi\right), \quad \Pi\left(\frac{c^2-b^2}{b^2},\, b,\, \varphi\right).$$

mutuellement irréductibles, l'une ayant un paramètre logarithmique, et l'autre un paramètre circulaire.

15. Nous nous proposons, maintenant, d'étudier d'une manière plus particulière les courbes qui dérivent de l'hyperbole équilatère; elles nous offriront quelques résultats curieux et dignes d'intérêt. En premier lieu, les équations de ces courbes, tant positives que négatives, peuvent être facilement obtenues.

Soient C le centre de l'hyperbole équilatère, P un point quelconque de cette courbe, et CP_1 une perpendiculaire abaissée sur la tangente au point P; par le point P_1 menons une ligne P_1P_2 faisant l'angle $CP_1P_2 = CPP_1$, abaissons de même CP_2 perpendiculaire sur P_1P_2, et faisons l'angle $CP_2P_3 = CPP_1$, et ainsi de suite; il est évident, d'après la construction donnée au n° **1**, que les points P_1, P_2, P_3,..., P_n engendreront la première, la seconde,..., la $n^{ième}$ courbe dérivée du système positif.

D'ailleurs, les angles PCP_1, P_1CP_2, P_2CP_3,..., sont évidemment égaux entre eux, et, d'après une propriété connue de l'hyperbole équilatère, l'angle PCP_1 est divisé en deux parties égales par l'axe focal CV de cette courbe; si donc on désigne par r la distance CP, par ω l'angle VCP, et de même par r_n et ω_n la distance CP_n et l'angle VCP_n, on aura

$$\omega_n = (2n-1)\,\omega, \quad \text{et} \quad r_n = r\cos^n 2\omega;$$

or l'équation de l'hyperbole est

$$r^2 \cos 2\omega = 1,$$

et l'on aura, par suite, pour l'équation de la $n^{ième}$ dérivée positive,

$$r_n^{\frac{2}{2n-1}} = \cos\left(\frac{2\omega_n}{2n-1}\right).$$

16. Par le même point de l'hyperbole équilatère, concevons une ligne PP_{-1} perpendiculaire à CP, et par le point C une droite CP_{-1} faisant, avec la première, un angle $CP_{-1}P$ égal à CPP_1; et de même, ayant mené une perpendiculaire à CP_{-1}, soit fait l'angle $CP_{-2}P_{-1}$ égal à $CP_{-1}P$, et ainsi de suite; il est évident que les points P_{-1}, P_{-2},... engendreront les différentes courbes dérivées du système négatif, et si l'on désigne par r_{-n} et ω_{-n} la distance CP_{-n} et l'angle VCP_{-n}, on trouvera aisément, pour l'équation de la $n^{ième}$ dérivée négative,

$$r_{-n}^{\frac{2}{2n+1}} \cos\left(\frac{2\omega_{-n}}{2n+1}\right) = 1;$$

d'où il résulte que les courbes des deux systèmes peuvent être représentées par l'équation unique

$$r_{\pm n}^{\frac{2}{\pm 2n+1}} = \cos\left(\frac{2\omega_{\pm n}}{\pm 2n-1}\right).$$

17. On trouve aisément que la rectification d'une quelconque des courbes positives dépend de la formule

$$ds_n = \left(\cos \frac{2\omega_n}{2n-1}\right)^{\frac{2n-3}{2}} d\omega_n,$$

d'où l'on déduit, en posant $\sin\varphi = \sqrt{2}\sin\frac{\omega_n}{2n-1}$,

$$s_n = \frac{2n-1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{(\cos\varphi)^{2n-2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\, d\varphi,$$

l'arc étant compté à partir du sommet commun de toutes les courbes, qui est aussi celui de l'hyperbole.

Cela posé, on a identiquement

$$2\sin\varphi\,(\cos\varphi)^{2n-3}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}$$
$$= (2n-1)\int \frac{\cos^{2n}\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\, d\varphi - (2n-3)\int \frac{\cos^{2n-4}\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\, d\varphi.$$

D'ailleurs

$$\int \frac{\cos^{2n}\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2n+1}\, s_{n+1},$$
$$\int \frac{\cos^{2n-4}\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2n-3}\, s_{n-1},$$

en sorte que les deux arcs correspondants de la $n-1^{\text{ième}}$ et de la $n+1^{\text{ième}}$ courbe positive seront liés entre eux par la relation simple

$$\sqrt{2}\sin\varphi\,(\cos\varphi)^{2n-3}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi} = \frac{2n-1}{2n+1}\, s_{n+1} - s_{n-1},$$

qui devient, dans le cas des quadrants complets S_{n-1} et S_{n+1},

$$\frac{S_{n-1}}{S_{n+1}} = \frac{2n-1}{2n+1}.$$

On voit, d'après cela, que la rectification de toutes les courbes positives d'ordre impair ne dépend que de celle de la première de ces courbes que l'on sait être la lemniscate de Bernoulli, et dont l'arc s_1 est exprimé par une fonction elliptique de première espèce et de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La rectification des courbes d'ordre pair ne dépendra que de la détermination de s_2; or on a

$$ds_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}},$$

donc

$$s_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \left[2\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) \right].$$

D'ailleurs, si s désigne l'arc de l'hyperbole correspondant à l'angle polaire ω, on trouve aisément, en posant $\sin \varphi = \sqrt{2} \sin \omega = \sqrt{2} \sin \frac{\omega_2}{3}$,

$$\sqrt{2} \operatorname{tang} \varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) - \mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi\right) \right] + s,$$

et, par conséquent,

$$s_2 = 3\left(\sqrt{2} \operatorname{tang} \varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi} - s\right).$$

La partie algébrique $\sqrt{2} \operatorname{tang} \varphi \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \varphi}$, qui entre dans cette équation, n'est autre chose que la portion de tangente à l'hyperbole à l'extrémité de l'arc s, comprise entre cette extrémité et le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur sa direction : nous l'appellerons, pour abréger, *longueur de la tangente de l'arc hyperbolique;* en sorte que l'équation précédente exprimera qu'un arc quelconque de la seconde courbe positive, compté à partir du sommet, est égal à trois fois la différence entre l'arc hyperbolique correspondant et sa tangente, et, par conséquent, que la longueur entière d'un quadrant de la seconde courbe positive est égale à trois fois la différence entre l'arc hyperbolique indéfini et son asymptote.

18. Si P_{n-1} et P_n désignent les points correspondants de la $n-1^{ième}$ et de la $n^{ième}$ courbe positive, la quantité algébrique qui entre dans la relation entre s_{n-1} et s_{n+1}, du n° **16**, n'est autre chose que la droite $P_{n-1}P_n$, c'est-à-dire la portion de la tangente à la $(n-1)^{ième}$ courbe, comprise entre le point de contact et le point où elle rencontre la $n^{ième}$ courbe; en effet, le carré de cette distance a pour expression

$$r_{n-1}^2 - r_n^2 = \cos^{2n-3}\left(\frac{2\omega_{n-1}}{2n-3}\right) - \cos^{2n-1}\left(\frac{2\omega_n}{2n-1}\right).$$

D'ailleurs

$$\cos^2\varphi = \cos\frac{2\omega_{n-1}}{2n-3} = \cos\frac{2\omega_n}{2n-1},$$

donc

$$P_{n-1}P_n = \sqrt{2}\sin\varphi\cos^{2n-3}\varphi\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}.$$

D'après cela, si P_{n-1}, P_n, P_{n+1} sont trois points correspondants de la $n-1^{ième}$, de la $n^{ième}$ et de la $(n+1)^{ième}$ courbe, et V leur sommet commun, on aura

$$\text{arc } VP_{n-1} + \text{ligne droite } P_{n-1}P_n = \frac{2n-1}{2n+1}\text{ arc } VP_{n+1}.$$

Cette propriété peut être démontrée d'une manière très-simple à l'aide des deux propositions suivantes :

I. Soient VPQ une courbe quelconque, et OP_1 une perpendiculaire abaissée d'un point fixe O sur la tangente en un point P quelconque; si l'on désigne par r_1 le rayon OP_1, et par ω_1 l'angle VOP_1, la somme de l'arc VP_1 et de la droite PP_1 sera exprimée par l'intégrale $\int r_1 d\omega_1$.

La démonstration de ce théorème se trouve dans la plupart des Traités de calcul intégral; il peut être aussi déduit de notre formule fondamentale (A) en faisant $n = -1$.

II. Soit $OP = r$, l'arc s_1 de la courbe lieu des points P_1 sera représenté par l'intégrale $\int r d\omega_1$. En effet,

$$\frac{OP_1}{PP_1} = \text{tang } OPP_1 = r_1\frac{d\omega_1}{dr_1},$$

et, par conséquent,

$$PP_1 = \frac{dr_1}{d\omega_1};$$

d'ailleurs

$$ds_1 = d\omega_1 \sqrt{r_1^2 + \frac{dr_1^2}{d\omega_1^2}} = d\omega_1 \sqrt{\overline{OP_1}^2 + \overline{PP_1}^2} = r\,d\omega_1,$$

d'où

$$s_1 = \int r\,d\omega_1.$$

Considérons, maintenant, trois courbes consécutives du système positif; l'accroissement élémentaire de la somme de l'arc de la $(n-1)^{ième}$ courbe et de la portion de sa tangente terminée à la $n^{ième}$, est, d'après le théorème I, égal à $r_n\,d\omega_n$, et l'accroissement correspondant de l'arc de la $(n+1)^{ième}$ est, d'après le théorème II, égal à $r_n\,d\omega_{n+1}$, d'où il suit que le rapport de ces accroissements est $\frac{d\omega_n}{d\omega_{n+1}}$ ou $\frac{2n-1}{2n+1}$; c'est donc également le rapport des quantités finies elles-mêmes comptées à partir du sommet, puisqu'elles s'évanouissent simultanément en ce point.

De la relation

$$\frac{S_{n-1}}{S_{n+1}} = \frac{2n-1}{2n+1},$$

donnée au n° **16**, et qui a lieu entre les quadrants complets, on déduit

$$S_3 = \frac{5}{3}\,S_1,$$

$$S_4 = \frac{7}{5}\,S_2,$$

$$S_5 = \frac{9}{7}\,S_3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_n = \frac{2n-1}{2n-3}\,S_{n-2},$$

$$S_{n+1} = \frac{2n+1}{2n-1}\,S_{n-1},$$

et, en multipliant ces équations membre à membre,

$$S_n S_{n+1} = \frac{2n+1}{3} S_1 S_2.$$

Cela posé, on a la relation connue entre les fonctions complètes de modules complémentaires,

$$F(b)E(c) + F(c)E(b) - F(b)F(c) = \frac{\pi}{2} [*],$$

laquelle, dans le cas de $b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, se réduit à

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{\pi}{2}.$$

D'ailleurs

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$S_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\left[2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

donc

$$S_1 S_2 = \frac{3}{2} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{3}{4}\pi;$$

d'où l'on déduit cette relation remarquable entre les quadrants complets de deux courbes positives consécutives,

$$S_n S_{n+1} = \frac{2n+1}{4}\pi.$$

On reconnaîtra aisément que les arcs des courbes négatives ne renferment, dans leur expression, que des fonctions de la première et de la seconde espèce de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et qu'il existe entre ces arcs des relations analogues à celles que nous avons démontrées pour les courbes du système positif.

---

[*] LEGENDRE, *Traité des fonctions elliptiques*, tome I, page 60.