# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



FINCK


**Équations numériques. Recherche des facteurs commensurables du second degré**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 10 (1845), p. 171-176.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__171_0>

# ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

## RECHERCHE

## DES FACTEURS COMMENSURABLES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. FINCK.

1. Je diviserai cette question en deux parties. Dans la première, je m'occuperai des racines imaginaires à coefficients commensurables, telles que $5 + \frac{2}{3}\sqrt{-1}\ldots$, que j'appellerai, selon l'usage, *racines commensurables complexes;* dans la seconde partie, il s'agira des racines incommensurables, exprimables par des radicaux du second degré, c'est-à-dire de toutes les racines qui peuvent être fournies par des équations du second degré à coefficients réeels commensurables.

2. Dans l'une et l'autre, je m'appuierai sur ce que :

*Une fonction entière absolue*

$$fx = x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m,$$

*dont le premier coefficient est l'unité, ne saurait admettre un diviseur*

$$ax^{m-\alpha} + a_1 x^{m-\alpha-1} + \ldots,$$

*entier absolu, dont le premier coefficient est différent de l'unité, $a$, $a_1$, $a_2$, etc., étant premiers entre eux.*

Car soit $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D}}$ le quotient, Q étant entier absolu, et premier avec le nombre entier D; on aurait

$$fx = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D}}(ax^{m-\alpha} + \ldots).$$

Mais D est premier avec Q; D ne divise pas $ax^{m-\alpha} + \ldots$, dont les coefficients sont premiers entre eux; donc, etc.

*Recherche des racines commensurables complexes.*

3. Je suppose, dans tout ce qui suit, que les coefficients soient réels; si le contraire a lieu, c'est-à-dire s'il s'agit d'une équation telle que

$$\varphi x + \psi x . \sqrt{-1} = 0,$$

ses racines réelles satisfont à

$$\varphi x = 0, \quad \psi x = 0,$$

et seront, par suite, racines du plus grand commun diviseur de $\varphi x$ et $\psi x$; ses racines imaginaires satisferont à

$$(\varphi x)^2 + (\psi x)^2 = 0,$$

et parmi les racines imaginaires de celles-ci, supposées *connues*, on distinguera facilement celles de la proposée.

4. On sait que dans toute équation, l'unité augmentée du module maximum des coefficients rapportés au premier est une limite supérieure des modules des racines de toute espèce. Soit $k$ cette limite.

5. *Dans toute équation à coefficients réels entiers $fx = 0$, le dernier terme est divisible par le carré du module de chaque racine complexe entière.*

Car si $a + b\sqrt{-1}$ est une pareille racine, $fx$ est divisible par $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$; et comme le premier terme du diviseur a pour coefficient l'unité, le quotient sera entier absolu; d'ailleurs son dernier terme, multiplié par $a^2 + b^2$, reproduira le dernier terme de $fx$. Donc, etc.

6. D'après cela, pour trouver les racines complexes entières de $fx$, on cherche les facteurs du dernier terme, en se bornant à ceux qui sont moindres que $k^2$ : on décomposera chacun de ces diviseurs en deux carrés additifs, comme $a^2 + b^2$, et l'on aura à essayer les quatre couples de racines $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, $\pm b \pm c\sqrt{-1}$, ce qui peut donner lieu à quatre essais.

7. *Règle d'exclusion.* Si $a + b\sqrt{-1}$ satisfait à $fx = 0$, on a

$$fx = (x - a - b\sqrt{-1})\,\varphi x,$$

$\varphi x$ étant complexe entier; de là

$$(1)\qquad fa = -b\sqrt{-1}\,\varphi a,$$

$$(2)\qquad f(b\sqrt{-1}) = -a\varphi\,(b\sqrt{-1}),$$

$$(3)\qquad f(1) = (1 - a - b\sqrt{-1})\,\varphi 1,$$

$$(4)\qquad f(1) = -(1 + a + b\sqrt{-1})\,\varphi(-1).$$

On a encore

$$fx = [(x-a)^2 + b^2]\,\psi x,$$

$\psi x$ est entier et réel.

De là

$$(5)\qquad f1 = [(1-a)^2 + b^2]\,\psi 1,$$

$$(6)\qquad f(-1) = [(1+a)^2 + b^2]\,\psi(-1),$$

$$(7)\qquad fa = b^2\,\psi a.$$

8. Ayant ainsi limité les nombres à essayer, on peut procéder comme pour les racines commensurables; mais si l'on observe que, dans ce dernier cas, et par rapport à un diviseur $c$, la méthode des racines commensurables revient à diviser par $c - x$ le premier membre de l'équation, ordonné d'une manière ascendante, on sera conduit à diviser de même $fx$ par $a^2 + b^2 - 2ax + x^2$. On aura ainsi plus de chances pour se débarrasser, le plus simplement, des nombres qui ne sont pas racines

9. Voici un exemple :

$$x^7 - x^6 + 6x^5 - 26x^4 + 17x^3 - 7x^2 - 32x - 10 = 0.$$

Dans le cas actuel on aurait

$$k = 33;$$

mais le carré d'aucun module ne peut surpasser 10; donc les diviseurs sont 1, 2, 5, 10, qui se décomposent, sous la forme $a^2 + b^2$, ainsi qu'il suit :

$$1 = 0^2 + 1^2,\quad 2 = 1^2 + 1^2,\quad 5 = 1^2 + 2^2,\quad 10 = 1^2 + 3^2.$$

De là, à essayer,

$$\pm\sqrt{-1},\quad \pm 1 \pm \sqrt{-1},\quad \pm 1 \pm 2\sqrt{-1},$$
$$\pm 2 \pm \sqrt{-1},\quad \pm 1 \pm 3\sqrt{-1},\quad \pm 3 \pm \sqrt{-1}.$$

$\pm\sqrt{-1}$ ne convient pas; cela se voit à l'inspection de l'équation comparée avec $x^2 + 1$.

On a $f1 = -52$, $f(-1) = -36.1$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pour | $a = 1$, | $b = 1$, | on a | $(1+a)^2 + b^2 = 5$, | qui ne divise pas | $f(-1)$. | Rejet de | $1 \pm \sqrt{-1}$. |
| | $a = -1$, | $b = 1$, | | $(1-a)^2 + b^2 = 5$, | | $f(1)$. | | $-1 \pm \sqrt{-1}$. |
| Pour | $a = 1$, | $b = 2$, | il vient | $(1+a)^2 + b^2 = 8$, | | $f(-1)$. | | $+1 \pm 2\sqrt{-1}$. |
| | $a = -1$, | $b = 2$, | donne | $(1-a)^2 + b^2 = 8$, | | $f1$. | | $-1 \pm 2\sqrt{-1}$. |
| Pour | $a = 2$, | $b = 1$, | | $(1+a)^2 + b^2 = 10$, | | $f-1$. | | $+2 \pm \sqrt{-1}$. |
| | $a = -2$, | $b = 1$, | | $(1-a)^2 + b^2 = 10$, | | $f(1)$. | | $-2 \pm \sqrt{-1}$. |
| | $a = 1$, | $b = 3$, | | $(1+a)^2 + b^2 = 13$, | | $f(-1)$. | | $+1 \pm 3\sqrt{-1}$. |
| | $a = -1$, | $b = 3$, | | $(1-a)^2 + b^2 = 13$, | qui divise | $f1$. | A essayer | $-1 \pm 3\sqrt{-1}$. |
| | $a = 3$, | $b = 1$, | | $(1+a)^2 + b^2 = 17$, | ne divise pas | $f-1$. | Rejet de | $3 \pm \sqrt{-1}$. |
| | $a = -3$, | $b = 1$, | | $(1-a)^2 + b^2 = 17$, | | $f1$. | Rejet. | |

Il ne reste que $-1 \pm 3\sqrt{-1}$, ou le facteur $x^2 + 2x + 10$, qui, en effet, divise $fx$, et donne pour quotient

$$(1)\qquad x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Aucun des nombres ci-dessus essayés ne peut convenir à cette équation; de plus, nous allons prouver qu'une équation de la forme

$$x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_m = 0,$$

$p_1$, $p$, etc. étant entiers réels, n'a point de racines complexes fractionnaires.

**10.** En effet, soit un couple

$$x = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{d}\sqrt{-1},$$

où $a$, $b$, $c$, $d$ sont entiers; $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$ irréductibles.

Le facteur correspondant à ces deux racines est

$$x^2 - \frac{2a}{c}x + \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2}.$$

Si $\frac{a}{c}$ était entier, $\frac{b}{d}$ ne l'étant pas, $\frac{b^2}{d^2}$ ne le serait pas, et $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2}$ serait fractionnaire.

Si $\frac{b}{d}$ était entier, $\frac{a}{c}$ serait fractionnaire, ainsi que $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{d^2}$.

Admettons que $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{d}$ soient fractionnaires tous les deux ; je dis que l'un des coefficients du diviseur du second degré l'est au moins. Car, pour que $\frac{2a}{c}$ soit entier, il faut que $c = 2$, et le dernier terme devient $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{d^2}$. Si $d$ est pair, $b$ ne l'est pas. Supposons $d = 2d'$ ; on a

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{d^2} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4d'^2} = \frac{a^2d'^2 + b^2}{4d'^2}.$$

Or, $b$ étant impair, $b^2$ est de la forme $4k + 1$, et $a^2d'^2$, qui est un carré, est de l'une des formes $4k'$, $4k' + 1$. Donc le numérateur n'est pas divisible par 4, et le terme n'est pas entier. Que si $d$ est impair, notre dernier terme devient $\frac{a^2d^2 + 4b^2}{4d^2}$; mais $a$ et $d$ étant impairs, le carré $a^2d^2$ est de la forme $4k + 1$, et l'expression n'est pas entière. Donc le facteur du second degré a au moins un terme fractionnaire, et si on le ramène à la forme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\beta$ et $\gamma$ ne sont pas tous les deux divisibles par $\alpha$.

Il s'ensuit, 1° que l'équation (1) n'a plus de racines commensurables complexes; 2° que la recherche des racines complexes fractionnaires se ramène à celle des racines complexes entières.

**11.** Nous allons maintenant chercher si l'équation (1) a des racines incommensurables du second degré de la forme $a + \sqrt{b}$, $a$ et $b$ étant entiers. Ces sortes de racines correspondent à des facteurs tels que $x^2 + px + q$, où $p$ et $q$ sont entiers. Une équation telle que

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots = 0$$

peut avoir de pareils facteurs, où $p$ et $q$ sont fractionnaires; on ramène la question au cas des nombres entiers.

Si notre équation (1) admet le facteur $x^2 + px + q$, c'est que $q$ est un diviseur du dernier terme de l'équation (1); on essayera donc successivement tous les diviseurs du dernier terme : ils sont $+1$, $-1$. Essayons $+1$ : cet essai revient à diviser l'équation (1) par $x^2+px+1$ : on arrivera à un reste

$$xFp + F_1p = 0,$$

et les équations

$$Fp = 0, \quad F_1p = 0$$

devront admettre une racine entière commensurable, sinon $q = 1$ ne convient pas. C'est ce qui arrive ici. On essaye ensuite $q = -1$. Voici le calcul :

$$\begin{array}{l|l}
x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 3x - 1 & x^2 + px - 1 \\ \cline{2-2}
x^4(-p-3) + 3x^3 & x^3 + x^2(-p-3) + x(p^2+3p+3) - p^3 - 3p^2 - 4p - 3, \\
x^3(p^2+3p+3) + x^2(-p-3), & \\
x^2(-p^3 - 3p^2 - 4p - 3) + x(p^2 + 3p), & \\
x(p^4 + 3p^3 + 5p^2 + 6p) - p^3 - 3p^2 - 4p - 4. &
\end{array}$$

On cherche les racines entières du dernier coefficient; il vient $p = -2$, qui annule aussi l'autre.

Donc notre équation admet le facteur $x^2 - 2x - 1$, et de plus le facteur $x^3 - x^2 + x + 1$. Ce dernier n'a point de diviseur commensurable du second degré.

On peut aussi chercher les diviseurs commensurables du troisième, du quatrième, etc., degré. Le parti à tirer de cela est facile à reconnaître.