JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAYLEY

Sur quelques intégrales multiples

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 158-168.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__158_0>

SUR QUELQUES INTÉGRALES MULTIPLES;

PAR M. A. CAYLEY.

J'ai donné, il y a trois ans, dans le *Cambridge Mathematical Journal*, une formule assez singulière pour l'intégrale multiple

$$\int \ldots dx_1\, dx_2 \ldots \varphi(a_1 - x_1,\ a_2 - x_2 \ldots),$$

prise entre les limites données par l'équation

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \frac{x_2^2}{h_2^2} + \ldots = 1,$$

la fonction φ étant seulement assujettie à la condition de ne pas devenir infinie entre les limites de l'intégration. L'expression que j'obtiens est une suite infinie, dont le terme général est de cette forme

$$\mathrm{A}_p . \left(h_1^2 \frac{d^2}{da_1^2} + h_2^2 \frac{d^2}{da_2^2} + \ldots\right)^p . \varphi(a_1,\ a_2 \ldots).$$

En appliquant ce résultat à un cas particulier, j'ai obtenu l'intégrale à n variables analogue à celle qui exprime le *potentiel* d'un ellipsoïde homogène, pour un point extérieur. J'ai depuis cherché à étendre ces résultats au cas d'une densité variable et égale à une fonction rationnelle et entière des coordonnées, et d'une loi d'attraction selon une puissance quelconque de la distance (toujours à n variables); mais quoique j'aie réussi à effectuer cette généralisation, mes formules étaient si confuses et si inférieures à celles que donne la belle analyse de M. Lejeune-Dirichlet, que je ne les ai jamais publiées. Cependant, en revenant il y a quelques jours sur ce sujet, en me fondant sur une intégrale plus générale, j'ai trouvé que la question était à peine plus difficile que dans le cas d'une densité constante, et se laissait traiter exactement de la même manière. J'ai réussi de cette façon à exprimer l'intégrale cherchée au moyen d'une seule intégrale définie *abélienne*, et de ses coefficients différentiels relatifs aux constantes qui y entrent: et il m'a paru que les formules que j'ai ainsi obtenues pourraient n'être pas tout à fait indignes de l'attention des géomètres.

Considérons l'intégrale multiple à n variables V, donnée par l'équation

$$V = \int dx_1 \ldots x_1^{2\alpha_1+1} \ldots (f \text{ termes})\, x_{f+1}^{2\alpha_{f+1}} \ldots (\overline{n-f} \text{ termes})\, \varphi(a_1 - x_1 t, \ldots),$$

où les variables $x_1, \ldots$ doivent recevoir des valeurs réelles quelconques, positives ou négatives, qui satisfassent à la condition

$$\frac{x_1^2}{h_1^2} + \ldots \leqq 1;$$

et l'on suppose de plus qu'il est permis de développer (sous le signe intégral) la fonction φ, suivant les puissances ascendantes des variables $x_1, \ldots$.

En faisant ce développement, il est clair que les termes qui contiennent des puissances impaires d'une ou de plusieurs des variables se détruisent par l'intégration; donc, en ne faisant attention qu'aux termes qui contiennent seulement des puissances paires, on a ce terme général

$$\frac{(-)^f . t^{2p+f}}{[2r_1+1]^{2r_1+1} \ldots [2r_{f+1}]^{2r_{f+1}} \ldots} \left(\frac{d}{da_1}\right)^{2r_1+1} \ldots \left(\frac{d}{da_{f+1}}\right)^{2r_{f+1}} \ldots \varphi(a_1, \ldots)$$
$$\times \int dx_1 \ldots x_1^{2\alpha_1+2r_1+2} \ldots x_{f+1}^{2\alpha_{f+1}+2r_{f+1}} \ldots,$$

où

$$p = r_1 + \ldots;$$

il est à peine nécessaire de remarquer que, dans l'expression

$$[2r_1 + 1]^{2r_1+1} \ldots [2r_{f+1}]^{2r_{f+1}} \ldots,$$

il faut prendre (f) termes tels que $[2r_1 + 1]^{2r_1+1}$, et $\overline{n-f}$ termes de l'autre forme $[2r_{f+1}]^{2r_{f+1}}$, et ainsi dans tous les cas semblables.

L'intégrale qui entre dans cette formule a été trouvée, comme on sait, par M. Dirichlet. Sa valeur est

$$\frac{\Gamma\left(\alpha_1+r_1+\frac{3}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\alpha_{f+1}+r_{f+1}+\frac{1}{2}\right)\cdots}{\Gamma\left(p+k+f+\frac{n}{2}+1\right)}\, h_1^{2\alpha_1+2r_1+3}\cdots h_{f+1}^{2\alpha_{f+1}+2r_{f+1}+1},$$

où

$$k=\alpha_1+\ldots.$$

Le terme entier devient, après quelques réductions très-simples,

$$\frac{(-)^f \pi^{\frac{1}{2}n} t^{2p+f}}{2^{2p+k+f}\,\Gamma\left(p+k+f+\frac{1}{2}n+1\right)}$$

$$\times\frac{\mathrm{L}_1\ldots\mathrm{M}_{f+1}\ldots}{[r_1]^{r_1}\ldots}\, h_1^{2\alpha_1+2r_1+3}\ldots h_{f+1}^{2\alpha_{f+1}+2r_{f+1}+1}\left(\frac{d}{da_1}\right)^{2r_1+1}\cdots\left(\frac{d}{da_{f+1}}\right)^{f+1}\cdots\varphi(a_1,\ldots),$$

où l'on écrit, pour un moment,

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_1 &= \overline{2r_1+3}\;\overline{2r_1+5}\ldots\overline{2r_1+2\alpha_1+1},\\
&\;\vdots\\
\mathrm{M}_{f+1} &= \overline{2r_{f+1}+1}\;\overline{2r_{f+1}+3}\ldots\overline{2r_{f+1}+2\alpha_{f+1}-1};\\
&\;\vdots
\end{aligned}$$

puis on le transforme en

$$\frac{(-)^f \pi^{\frac{1}{2}n}.t^{2p+f}}{2^{2p+k+f}\,\Gamma\left(p+k+f+\frac{1}{2}n+1\right)}$$

$$\times\left(\frac{d}{da_1}\cdots\frac{d}{da_f}\right)\cdot\left(h_1^3\frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1}\ldots h_1^3\ldots\; h_{f+1}\ldots\frac{1}{[r_1]^{r_1}}\left(h_1^2\,\frac{d^2}{da_1^2}\right)^{r_1}\cdots\varphi(a_1,\ldots).$$

En effet, les symboles $\frac{d}{da_1}$ et $h_1^3\,\frac{d}{dh_1}$ étant conversibles, on a

$$\frac{d}{da_1}\cdot\left(h_1^3\,\frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1}\cdot h_1^{2r_1+3}\left(\frac{d}{da_1}\right)^{2r_1}=\mathrm{L}_1 h_1^{2r_1+2\alpha_1+3}\left(\frac{d}{da_1}\right)^{2r_1+1};$$

et ainsi de suite.

En prenant la somme de tous les termes qui correspondent à une même valeur de p, on a

$$\mathrm{S}\frac{1}{[r_1]^{r_1}}\left(h_1^2\frac{d^2}{da_1^2}\right)^{2r_1}\ldots=\frac{1}{[p]^p}\nabla^p.$$

En posant

$$\nabla=\left(h_1^2\frac{d^2}{da_1^2}+\ldots\right);$$

puis, en observant que p doit s'étendre depuis o jusqu'à ∞, on a, pour l'intégrale cherchée,

$$\mathrm{V}=\frac{(-)^f.\pi^{\frac{1}{2}n}}{2^{k+f}}\left(\frac{d}{da_1}\cdots\frac{d}{da_f}\right)\cdot\left(h_1^3\frac{d}{dh_1}\right)^{\alpha_1}\cdots$$
$$\times\left[h_1^3\ldots h_{f+1}\ldots t^f.\mathrm{S}_{p=0}^{p=\infty}\left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}[p]^p\Gamma\left(p+k+f+\frac{1}{2}n+1\right)}\nabla^p.\varphi(a_1,\ldots)\right)\right];$$

ce qui fait voir que l'intégrale V dépend de cette seule expression

$$\mathrm{U}=\mathrm{S}_0^\infty\left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}[p]^p\Gamma\left(p+k+f+\frac{1}{2}n+1\right)}\nabla^p.\varphi(a_1,\ldots)\right).$$

On peut remarquer, en passant, que cette quantité satisfait à cette équation différentielle

$$\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\cdot\left(t^{-2k-2f-n+1}\frac{d}{dt}\left(t^{2k+2f+n}\,\mathrm{U}\right)\right)-\nabla\mathrm{U}=0,$$

ou

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{dt^2}+(2k+2f+n+1)\frac{1}{t}\frac{d\mathrm{U}}{dt}-\nabla\mathrm{U}=0.$$

M. G. Boole, de Lincoln, a déduit une équation semblable de mes formules dans le *Mathematical Journal*. C'est à lui qu'on doit l'introduction dans l'intégrale proposée de cette quantité t, ce qui, au reste, n'est pas d'une grande importance ici; mais j'ai cru devoir la conserver, à cause de cette équation même, qui pourrait conduire à des résultats intéressants.

A présent, soit

$$\varphi(a_1-x_1t,\ldots)=\frac{1}{((a_1-x_1t)^2+\ldots)^{\frac{1}{2}n-s}},$$

où s est un nombre entier; je pose, pour abréger,

$$\frac{1}{2}n - s = i, \quad k + f + s = \sigma,$$

ce qui donne

$$\Gamma\left(p + k + f + \frac{1}{2}n + 1\right) = \Gamma(p + i + \sigma + 1) = [p + i + \sigma]^{p+1}.\Gamma(i + \sigma):$$

et ainsi

$$U = \frac{1}{\Gamma(i+\sigma)} \mathbf{S}_0^\infty \left(\frac{t^{2p}}{2^{2p}.[p]^p[p + i + \sigma]^{p+1}} \nabla^p. \frac{1}{(a_1^2 + \ldots)^i}\right).$$

Le cas de $\sigma = 0$, qui est le plus simple, est, en effet, celui du Mémoire cité, et à ce cas on peut réduire celui de σ entier négatif; il y a même deux manières d'effectuer cette réduction. Représentons, en effet, la valeur de U par cette notation plus complète U_i; on obtient tout de suite

$$U_i^{-\sigma} = 2^{-2\sigma} t^{2\sigma - 2i} \left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^\sigma (t^{2i} U_i^0),$$

et

$$U_i^{-\sigma} = \frac{1}{2^{2\sigma}[1-i]^\sigma \left[i - \frac{1}{2}n\right]^\sigma} \left(\frac{d^2}{da_1^2} + \ldots\right)^\sigma U_{i-\sigma}^0,$$

la seconde desquelles équations se déduit de cette formule facile à démontrer,

$$\left(\frac{d^2}{da_1^2} + \ldots\right)^\sigma . \frac{1}{(a_1^2 + \ldots)^{i-\sigma}} = 2^{2\sigma}.[i-1]^\sigma \left[i - \frac{1}{2}n\right]^\sigma . \frac{1}{(a_1^2 + \ldots)^i}.$$

Nous pouvons donc, dans la suite, ne considérer que le cas de σ entier positif.

Commençons par opérer la transformation que voici; en déterminant ζ par l'équation

$$\frac{a_1^2}{\zeta + h_1^2} + \ldots = t^2,$$

je pose

$$l_1 = \frac{h_1^2}{\zeta}, \ldots, \quad a_1^2 = (1 + l_1) t^2 \alpha_1^2, \ldots,$$

ce qui donne

$$\zeta = \alpha_1^2 + \ldots,$$
$$a_1^2 + \ldots = t^2.[(1 + l_1)\,\alpha_1^2 + \ldots],$$
$$\nabla = \frac{\zeta}{t^2}\cdot\left(\frac{l_1}{1+l_1}\,\frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots\right),$$

où il faut remarquer que ce ζ, contenu en ∇, ne doit pas être affecté des symboles $\frac{d}{d\alpha_1}, \ldots$ de ∇, de manière qu'il faut écrire

$$\nabla^p = t^{-2p}.\zeta^p\left(\frac{l_1}{1+l_1}\,\frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots\right)^p = t^{-2p}(\alpha_1^2 + \ldots)^p.\left(\frac{l_1}{1+l_1}\,\frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots\right)^p,$$

$$\mathrm{U} = \frac{1}{\Gamma(i).t^{2i}(\alpha_1^2 + \ldots)^i}$$
$$\times \mathbf{S}_0^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2p}[p+i+\sigma]^{p+\sigma+i}\,[p]^p}(\alpha_1^2 + \ldots)^{p+i}\left(\frac{l_1}{1+l_1}\,\frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots\right)^p \frac{1}{(\alpha_1^2\,\overline{1+l_1} + \ldots)^i}\right),$$

formules qui se prêtent mieux aux réductions, quoique plus compliquées en apparence.

Écrivons d'abord

$$\frac{l_1}{1+l_1}\,\frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots = \left(\frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{1+l_1}\,\frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots\right)$$
$$= \Delta - \left(\frac{1}{1+l_1}\,\frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots\right).$$

En développant la $p^{\text{ième}}$ puissance de ce symbole selon les puissances de Δ, on a

$$(-)^{p-q}\,\frac{[p]^p}{[p-q]^{p-q}.[q]^q}\cdot\Delta^q\left(\frac{1}{1+l_1}\,\frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots\right)^{p-q},$$

qui doit s'appliquer à $\frac{1}{(\overline{1+l_1}\,\alpha_1^2 + \ldots)^i}$.

Considérons l'expression

$$\left(\frac{l_1}{1+l_1}\,\frac{d^2}{d\alpha_1^2} + \ldots\right)^{p-q}\frac{1}{(\overline{1+l_1}\,\alpha_1^2 + \ldots)^i},$$

et mettons, pour un moment,

$$(1 + l_1)\,\alpha_1^2 = \alpha_1'^2 \ldots,$$

cette expression se trouve réduite à

$$\left(\frac{d^2}{d\alpha'^2}+\ldots\right)^{p-q}\frac{1}{(\alpha'^2_1+\ldots)^i},$$

laquelle, par une formule déjà citée, devient

$$2^{2p-2q}.[i+p-q-1]^{p-q}.\left[i+p-q-\frac{1}{2}n\right]^{p-q}.\frac{1}{(\alpha'^2_1+\ldots)^{i+p-q}},$$

c'est-à-dire

$$2^{2p-2q}.[i+p-q-1]^{p-q}.\left[i+p-q-\frac{1}{2}n\right]^{p-q}.\frac{1}{(\alpha_1^2(1+l_1)+\ldots)^{i+p-q}}.$$

Le terme général de U, en faisant abstraction du facteur $\frac{1}{\Gamma(i).t^{2i}(\alpha_1^2+\ldots)^i}$, se réduit à

$$\frac{(-)^{p-q}.(\alpha_1^2+\ldots)^{p+i}}{2^{2q}[p+i+\sigma]^{\sigma+q+1}[p-q]^{p-q}.[q]^q}\left[i+p-q-\frac{1}{2}n\right]^{p-q}.\Delta^q.\frac{1}{(\alpha_1^2(1+l_1)+\ldots)^{i+p-q}}:$$

considérons la partie de ce terme qui est de l'ordre θ en $l_1,\ldots$, elle devient

$$\frac{(-)^{p-q+\theta}(\alpha_1^2+\ldots)^{p+i}}{2^{2q}.[p-q]^{p-q}[q]^q[s]^s}[i+p-q+\theta-1]^{\theta-\sigma-q-1}$$
$$\times\left[i+p-q-\frac{1}{2}n\right]^{p-q}\Delta^q.\frac{(l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+p-q+\theta}}.$$

Soit, en général, Θ une fonction homogène de l'ordre 2θ des lettres $\alpha_1,\ldots$; on a

$$\Delta\frac{\Theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^i}=\frac{\Delta\Theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^i}+2^2.i\left(i+1-2\theta-\frac{1}{2}n\right)\frac{\Theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+1}};$$

et de là, en répétant toujours l'opération Δ, et faisant attention à ce que $\Delta\Theta$, $\Delta^2\Theta,\ldots$ sont des fonctions homogènes des ordres $2\overline{\theta-1}$, $2\overline{\theta-2}$, etc., on obtient

$$\Delta^q.\frac{\Theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^i}=\frac{[q]^q}{[\lambda]^\lambda.[q-\lambda]^{q-\lambda}}2^{2q-2\lambda}[i+q-\lambda-1]^{q-\lambda}$$
$$\times\left[i+q-2\theta-\frac{1}{2}n\right]^{q-\lambda}\Delta^\lambda\Theta.\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+q-\lambda}},$$

ou

$$\Delta^q \cdot \frac{(l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+p-q+\theta}} = \frac{[q]^q}{[\lambda]^\lambda.[q-\lambda]^{q-\lambda}} 2^{2q-2\lambda}[i+p+\theta-\lambda-1]^{q-\lambda}$$
$$\times\left[i+p-\theta-\tfrac{1}{2}n\right]^{q-\lambda} \Delta^\lambda(l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta \cdot \frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{i+p+\theta-\lambda}},$$

depuis $\lambda = 0$, jusqu'à $\lambda = q$.

Puis, pour le terme général de U,

$$\frac{(-)^{p-q+\theta}}{2^{2\lambda}.[p-q]^{p-q}.[\theta]^\theta[\lambda]^\lambda[q-\lambda]^{q-\lambda}}[i+p+\theta-\lambda-1]^{\theta-\sigma-\lambda-1}$$
$$\times\left[i+p-q-\tfrac{1}{2}n\right]^{p-q}\left[i+p-\theta-\tfrac{1}{2}n\right]^{q-\lambda}\Delta^\lambda(l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta\cdot\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{\theta-\lambda}}.$$

ou

$$\frac{(-)^{-q}}{[p-q]^{p-q}.[q-\lambda]^{q-\lambda}}\left[i+p-\tfrac{1}{2}n-q\right]^{p-q}\left[i+p-\theta-\tfrac{1}{2}n\right]^{q-\lambda}$$
$$\times\frac{(-)^{p+\theta}}{2^{2\lambda}[\theta]^\theta.[\lambda]^\lambda}[i+p+\theta-\lambda-1]^{\theta-\sigma-\lambda-1}\Delta^\lambda(l_1\alpha_1^2+\ldots)^\theta\cdot\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{\theta-\lambda}}:$$

le dernier facteur étant indépendant de q, q doit s'étendre depuis o jusqu'à p. Mais à cause de $[q-\lambda]^{q-\lambda}$ qui devient infini pour $q<\lambda$, on peut faire étendre q depuis $q=\lambda$ jusqu'à $q=p$; ou, en écrivant

$$q-\lambda=q',\quad p-\lambda=p',$$

q' s'étend depuis o jusqu'à p'. Le facteur à sommer est donc

$$(-)^\lambda.\left\{\frac{(-)^{q'}}{[p'-q']^{p'-q'}[q']^{q'}}[C-q']^{p'-q'}[M]^{q'}\right\}.$$

Si, pour un moment, l'on pose

$$C=i+p'-\tfrac{1}{2}n,\quad M=i+p-\theta-\tfrac{1}{2}n,$$

somme qui se réduit à

$$(-)^\lambda\cdot\frac{[C-M]^{C-M-p'}}{[C-M-p']^{C-M-p'}},$$

c'est-à-dire à

$$(-)^\lambda\cdot\frac{[\theta-\lambda]^{\theta-p}}{[\theta-p]^{\theta-p}},$$

nous avons le terme général

$$\frac{(-)^{\lambda+p+\theta}[\theta-\lambda]^{\theta-p}.[i+\theta-\lambda-1+p]^{\theta-\sigma-\lambda-1}}{2^{2\lambda}.[\theta]^{\theta}[\lambda]^{\lambda}.[\theta-p]^{\theta-p}}\Delta^{\lambda}.(l_1\alpha_1^2+\ldots)^{\theta}.\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{\theta-\lambda}}.$$

Écrivons

$$p=\theta-p';$$

cela devient

$$\frac{(-)^{p'}[\mathrm{M}]^{p'}[\mathrm{C}-p']^{\mathrm{C}-\mathrm{A}}}{[p']^{p'}}\frac{(-)^{\lambda}}{2^{2\lambda}.[\theta]^{\theta}[\lambda]^{\lambda}}.\Delta^{\lambda}(l_1\alpha_1^2+\ldots)^{\theta}.\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{\theta-\lambda}},$$

$$\mathrm{M}=\theta-\lambda,\quad \mathrm{C}=i+2\theta-\lambda-1,\quad \mathrm{C}-\mathrm{A}=\theta-\sigma-\lambda-1;$$

p' doit s'étendre depuis $-\infty$ jusqu'à θ. Mais à cause de $[p']^{p'}$, qui devient infini, pour p' négatif, on peut l'étendre seulement depuis o jusqu'à θ, ou même seulement depuis o jusqu'à M, à cause du facteur $\mathrm{M}^{p'}$. La somme se réduit à

$$[\mathrm{C}-\mathrm{M}]^{\mathrm{C}-\mathrm{M}-\mathrm{A}}.[\mathrm{C}-\mathrm{A}]^{\mathrm{M}}=[i+\theta-1]^{-\sigma-1}[\theta-\sigma-\lambda-1]^{\theta-\lambda},$$

et le terme général devient

$$\frac{(-)^{\lambda}}{2^{2\lambda}.[\theta]^{\theta}[\lambda]^{\lambda}}[i+\theta-1]^{-\sigma-1}.[\theta-\sigma-\lambda-1]^{\theta-\lambda}\Delta^{\lambda}(l_1\alpha_1^2+\ldots)^{\theta}.\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{\theta-\lambda}}.$$

Écrivons enfin

$$\theta=\lambda+\varkappa,$$

le terme devient

$$\frac{(-)^{\lambda}}{2^{2\lambda}[\lambda]^{\lambda}.[\lambda+\varkappa]^{\lambda+\varkappa}[i+\lambda+\varkappa+\sigma]^{\sigma+1}}.[\varkappa-\sigma-1]^{\varkappa}.\Delta^{\lambda}.(l_1\alpha_1^2+\ldots)^{\lambda+\varkappa}.\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{\lambda}}.$$

Il faut que $\varkappa$ soit toujours positif, car autrement le terme s'évanouit à cause de $\Delta^{\lambda}(l_1\alpha_1^2+\ldots)^{\lambda+\varkappa}$; mais pour k plus grand que σ, le facteur $[\varkappa-\sigma-1]^{\varkappa}$ s'évanouit ; donc $\varkappa$ s'étend seulement depuis o jusqu'à σ.

Soit $k_1+\ldots=\varkappa$, et considérons les termes de $\Delta^{\lambda}(l_1\alpha_1^2+\ldots)$ qui contiennent $\alpha_1^{2k_1},\ldots$. Ces termes seront de la forme

$$\frac{[\lambda]^{\lambda}}{[q_1]^{q_1}\ldots}\frac{[\lambda+\varkappa]^{\lambda+\varkappa}}{[q_1+k_1]^{q_1+k_1}\ldots}\left(\frac{d^2}{d\alpha_1^2}\right)^{2q_1}\ldots l_1^{q_1+k_1}\alpha_1^{2q_1+2k_1}\ldots,$$

où

$$q_1+\ldots=\lambda.$$

c'est-à-dire

$$\frac{[\lambda]^{\lambda}.[\lambda+\varkappa]^{\lambda+\varkappa}.[2q_1+2k_1]^{2q_1}\ldots}{[q_1]^{q_1}\ldots[q_1+k_1]^{q_1+k_1}\ldots}\, l_1^{q_1+k_1}\ldots\alpha_1^{2k_1}\ldots,$$

ou, en réduisant à

$$2^{2\lambda}[\lambda]^{\lambda}[\lambda+\varkappa]^{\lambda+\varkappa}.\frac{\alpha_1^{2k_1}\ldots}{[k_1]^{k_1}\ldots}\frac{\left[q_1+k_1-\frac{1}{2}\right]^{q_1}\ldots}{[q_1]^{q_1}\ldots}\, l_1^{q_1+k_1}\ldots,$$

ce qui donne pour U,

$$\frac{(-)^{\lambda}}{[i+\varkappa+\lambda+\sigma]^{\sigma+1}}\frac{\left[q_1+k_1-\frac{1}{2}\right]^{q_1}\ldots}{[q_1]^{q_1}\ldots}\, l_1^{q_1+k_1}\ldots\frac{[\varkappa-\sigma-1]^{\varkappa}.\alpha_1^{2k_1}\ldots}{[k_1]^{k_1}}\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{\varkappa}}.$$

Soit

$$\frac{1}{((1+l_1u)\ldots)^{\frac{1}{2}}}=(0)+(1).u\ldots+(\lambda).u^{\lambda}+\ldots;$$

on a

$$(\lambda)=(-)^{\lambda}\frac{\left[q_1-\frac{1}{2}\right]^{q_1}\ldots}{[q_1]^{q_1}\ldots}\, l_1^{q_1}\ldots+\text{etc.},\qquad q_1+\ldots=\lambda;$$

et de là,

$$\frac{1}{\left[k_1-\frac{1}{2}\right]^{k_1}\ldots}\frac{1}{l_1^{\frac{1}{2}}\ldots}\left(l_1^2\frac{d}{dl_1}\right)^{k_1}\ldots l_1^{\frac{1}{2}}(\lambda)=(-)^{\lambda}.\frac{\left[q_1+k_1-\frac{1}{2}\right]^{q_1}\ldots}{[q_1]^{q_1}\ldots}\, l^{q_1+k_1}\ldots;$$

de manière que le terme de U devient

$$\frac{1}{l_1^{\frac{1}{2}}\ldots}\left(l_1^2\frac{d}{dl_1}\right)_1^{k_1}\ldots l_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{[i+\varkappa+\lambda+\sigma]^{\sigma+1}}(\lambda)\right).\frac{[\varkappa-\sigma-1]^{\varkappa}\alpha^{2k_1}\ldots}{[2k_1]^{2k_1}\ldots}\frac{1}{(\alpha_1^2+\ldots)^{\varkappa}}.$$

Prenant la somme pour λ, à l'aide de

$$[\sigma]^{\sigma}\int_0^1(1-u)^{\sigma}u^{i+\varkappa+\lambda-1}.du=\frac{1}{[i+\varkappa+\sigma+\lambda]^{\sigma-1}},$$

(ce qui suppose $l+u>0$), on obtient

$$\frac{2^{2\varkappa}.[\sigma]^{\sigma}.[\varkappa-\sigma-1]^{\varkappa}\alpha_1^{2k_1}\ldots}{[2k_1]^{2k_1}\ldots(\alpha_1^2+\ldots)^{\varkappa}}\frac{1}{\sqrt{l_1\ldots}}\left(l_1^2\frac{d}{dl_1}\right)^{k_1}\ldots\sqrt{l_1\ldots}\int_0^1\frac{(1-u)^{\sigma}.u^{i+\varkappa-1}du}{\{(1+l_1u)\ldots\}^{\frac{1}{2}}}.$$

ou, mettant $l_1 = \frac{h_1^2}{\zeta}, \ldots,$

$$2^{\varkappa}.[\sigma]^{\sigma}[\varkappa - \sigma - 1]^{\varkappa}.\frac{\alpha_1^{2k_1}\ldots}{[2k_1]^{2k_1}\ldots}\zeta^{\frac{n}{2}-2\varkappa}$$

$$\times \frac{1}{h_1\ldots}\left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{k_1}\ldots h_1\ldots \int_0^1 \frac{(1-u)^{\sigma} u^{i+\varkappa-1}.du}{\{(\zeta + h_1^2 u)\ldots\}^{\frac{1}{2}}};$$

en rétablissant le facteur constant $\frac{1}{\Gamma(i).\iota^{2i}.\zeta^i}$ de U, le terme général de cette quantité est

$$\frac{2^{\varkappa}.[\sigma]^{\sigma}[\varkappa-\sigma-1]^{\varkappa}}{\iota^{2i}\Gamma(i)}.\frac{\alpha_1^{2k_1}\ldots}{[2k_1]^{2k_1}\ldots}\zeta^{\frac{n}{2}-2\varkappa+i}$$

$$\times \frac{1}{h_1\ldots}\left(h_1^3 \frac{d}{dh_1}\right)^{k_1}\ldots h_1\ldots \int_0^1 \frac{(1-u)^{\sigma} u^{i+\varkappa-1}.du}{\{(\zeta + h_1^2 u)\ldots\}^{\frac{1}{2}}},$$

où k_1, etc., sont des entiers positifs quelconques qui satisfont à

$$k_1 + \ldots = \varkappa,$$

et $\varkappa$ peut s'étendre depuis o jusqu'à σ. Il faut observer qu'en différentiant par $\frac{d}{dh_1}$, etc., on ne doit pas considérer ζ comme fonction de $h_1, \ldots$, ce qui est cependant nécessaire dans l'équation entre V et U.