JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM THOMSON

Démonstration d'un théorème d'analyse

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 137-147.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__137_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

DÉMONSTRATION
D'UN THÉORÈME D'ANALYSE;

PAR M. WILLIAM THOMSON.

Nous nous proposons ici d'évaluer l'intégrale multiple, à n variables,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\frac{d\xi_1\, d\xi_2\ldots d\xi_n}{[(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+\ldots+u^2]^{\frac{n+1}{2}}\,[(\xi_1-x'_1)^2+(\xi_2-x'_2)^2+\ldots+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}},$$

ou, comme on le peut écrire, pour la brièveté,

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n\frac{[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n+1}{2}}\,[\Sigma(\xi-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Nous représenterons la valeur cherchée par U.

Pour la trouver, soit $u+u'=a$, les quantités u et u' étant prises positivement, et posons

$$(1)\qquad R=\frac{1}{[\Sigma(\xi-x)^2+v^2]^{\frac{n-1}{2}}}-\frac{1}{[\Sigma(\xi-x)^2+(2u-v)^2]^{\frac{n-1}{2}}},$$

$$(2)\qquad R'=\frac{1}{[\Sigma(\xi-x')^2+(a-v)^2]^{\frac{n-1}{2}}},$$

d'où nous tirons

$$-2(n-1)uU=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n R'\frac{dR}{dv}[d\xi]^n,\quad \text{quand}\quad v=u.$$

On voit que le second membre de cette équation s'évanouit quand

$v = \pm \infty$, et qu'il ne devient jamais infini, même quand v est égal à 0, $2u$, ou a. Ainsi, on peut écrire

$$-2(n-1)u\mathrm{U} = \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \left(\frac{d\mathrm{R}'}{dv}\frac{d\mathrm{R}}{dv} + \mathrm{R}'\frac{d^2\mathrm{R}}{dv^2}\right)[d\xi]^n\, dv.$$

Mais on a

$$\int\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{d\mathrm{R}'}{dv}\frac{d\mathrm{R}}{dv}[d\xi]^n\, dv = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \int \frac{d\mathrm{R}'}{dv}\frac{d\mathrm{R}}{dv}\, dv [d\xi]^2$$
$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}'}{dv}[d\xi]^n - \int\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \mathrm{R}\frac{d^2\mathrm{R}'}{dv}[d\xi]^n\, dv.$$

En prenant l'intégrale par rapport à v entre les limites $-\infty$ et u, le premier terme s'évanouit puisqu'à chaque limite $\mathrm{R} = 0$. Ainsi l'équation précédente se réduit à

$$-2(n-1)u\mathrm{U} = \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \left(\mathrm{R}'\frac{d^2\mathrm{R}}{dv^2} - \mathrm{R}\frac{d^2\mathrm{R}'}{dv^2}\right)[d\xi]^n\, dv.$$

Or on a

$$\frac{d^2\mathrm{R}'}{dv^2} + \sum\frac{d^2\mathrm{R}'}{d\xi^2} = 0,$$

équation qui est satisfaite pour toutes les valeurs de v entre les limites indiquées, puisque la valeur a n'y est pas renfermée. Combinant cette équation avec la précédente, on en conclut

$$-2(n-1)u\mathrm{U} = \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \left(\mathrm{R}'\frac{d^2\mathrm{R}}{dv^2} + \mathrm{R}\sum\frac{d^2\mathrm{R}'}{d\xi^2}\right)[d\xi]^n\, dv.$$

En intégrant par parties un des termes de cette équation, on a

$$\int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \mathrm{R}\frac{d^2\mathrm{R}'}{d\xi_{,}^2}[d\xi]^n\, dv$$
$$= \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^{n-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{R}\frac{d^2\mathrm{R}'}{d\xi_{,}^2}\, d\xi_{,}\right)[d\xi]^{n-1}\, dv$$
$$= -\int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^{n-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mathrm{R}'}{d\xi_{,}}\frac{d\mathrm{R}}{d\xi_{,}}\, d\xi_{,}\right)[d\xi]^{n-1}\, dv$$
$$= \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \mathrm{R}'\frac{d^2\mathrm{R}}{d\xi_{,}^2}[d\xi]^n\, dv,$$

puisque, à chaque limite, les parties intégrées s'évanouissent. En appliquant un procédé semblable à chaque terme contenu sous le signe Σ, il vient donc

$$-2(n-1)uU = \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^{n} R'\left(\frac{d^2R}{dv^2} + \sum\frac{d^2R}{d\xi^2}\right)[d\xi]^n\, dv.$$

Mais, en appelant Q et Q' les deux parties de R dans l'équation (1), de sorte que $R = Q - Q'$, nous avons

$$\frac{d^2Q'}{dv^2} + \sum\frac{d^2Q'}{d\xi^2} = 0$$

pour toutes les valeurs des variables v, ξ_1, etc., comprises entre les limites de l'intégration; ainsi il reste simplement

$$-2(n-1)uU = \int_{-\infty}^{u}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^{n} R'\left(\frac{d^2Q}{dv^2} + \sum\frac{d^2Q}{d\xi^2}\right)[d\xi]^n\, dv.$$

Pour déterminer la valeur de cette expression, nous observerons que la quantité sous les signes d'intégration s'évanouit pour toutes les valeurs des variables qui diffèrent sensiblement de celles exprimées par

$$v = 0, \quad \xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \text{etc.},$$

et que, d'ailleurs, si l'on considère séparément les termes du second membre, on trouve pour chacun une intégrale convergente; d'où il suit qu'en appelant P la valeur que R' prend quand les variables ont ces valeurs, nous avons

$$(3) \qquad -2(n-1)uU = P\int\int\int\ldots\left(\frac{d^2Q}{dv^2} + \sum\frac{d^2Q}{d\xi^2}\right) dv\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n,$$

où les limites des intégrations peuvent être quelconques, pourvu qu'elles comprennent les valeurs 0, x_1, x_2, etc. En considérant séparément les divers termes de cette expression, intégrant chacun d'eux une fois, en limitant l'intégration aux valeurs positives de la variable par rapport à laquelle l'intégration se fait, puis doublant le résultat, on obtient

$$(4) \quad -2(n-1)uU = 2P\left(\int\int\ldots\frac{dQ}{dv}\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots + \int\int\frac{dQ}{d\xi_1}\, dv\, d\xi_2 \ldots + \text{etc.}\right).$$

Posons maintenant

$$\xi_1 = v_1 + x_1, \quad \xi_2 = v_2 + x_2, \quad \text{etc.},$$

et

$$v^2 + v_1^2 + \ldots + v_n^2 = r^2,$$

ce qui donne

$$Q = \frac{1}{r^{n-1}}, \quad \frac{dQ}{dv} = -\frac{n-1}{r^{n+1}} v, \quad \frac{dQ}{dv_1} = -\frac{n-1}{r^{n+1}} v_1, \quad \text{etc.}$$

Nous pourrons étendre les intégrations, dans l'équation (3), à toutes les valeurs positives ou négatives des variables données par l'inégalité

$$v^2 + v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 \leqq a^2,$$

et puis, les limites dans l'équation (4) seront toutes les valeurs qui satisfont à l'équation

$$v^2 + v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = a^2, \quad \text{ou} \quad r^2 = a^2,$$

ce qui donne

$$\frac{dQ}{dv} = -\frac{n-1}{a^{n+1}} v, \quad \frac{dQ}{dv_1} = -\frac{n-1}{a^{n+1}} v_1, \quad \text{etc.}$$

Si, dans les intégrations, nous ne prenons que les valeurs positives des variables qui satisfont à l'équation des limites, il faudra multiplier chaque intégrale multiple par 2^n. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} uU &= \frac{2^n P}{a^{n+1}} \left(\int\int \ldots v \, dv_1 \, dv_2 \ldots dv_n + \int\int \ldots v_1 \, dv dv_2 \ldots dv_n + \text{etc.} \right) \\ &= \frac{2^n (n+1) P}{a^{n+1}} \int\int \ldots (a^2 - v_1^2 - v_2^2 - \ldots - v_n^2)^{\frac{1}{2}} dv_1 \, dv_2 \ldots dv_n \\ &= (n+1) P \int\int \ldots (1 - l_1 - l_2 \ldots - l_n)^{\frac{1}{2}} l_1^{-\frac{1}{2}} l_2^{-\frac{1}{2}} \ldots l_n^{-\frac{1}{2}} dl_1 \, dl_2 \ldots dl_n, \end{aligned}$$

où les limites comprennent les valeurs positives données par l'inégalité

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_n \leqq 1,$$

ce qui, d'après un théorème de M. Liouville, se réduit à

$$u\,\mathrm{U} = (n+1)\mathrm{P}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{n}{2}\int_0^1 (1-h)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{n}{2}-1}\,dh = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,\mathrm{P}.$$

En se rappelant que P est une fonction symétrique par rapport aux deux systèmes de variables u, x_1, x_2, etc., et u', x'_1, x'_2, etc., on voit que $u\mathrm{U} = u'\mathrm{U}'$, en désignant par U' la fonction qui correspond à U ; d'où il suit que

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & u\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n+1}{2}}\,[\Sigma(\xi-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}} \\ & = u'\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x')^2+u'^2]^{\frac{n+1}{2}}\,[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n-1}{2}}} \\ & = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,\frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+(u+u')^2]^{\frac{n-1}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Nous ajouterons ici une autre démonstration de ce théorème comme exemple d'une analyse remarquable donnée par Green, dans son Mémoire [*] intitulé : *On the determination of the exterior and interior attractions of ellipsoids of variable densities.*

En effet, soit

$$(6)\qquad \mathrm{V} = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{u\,[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n+1}{2}}\,[\Sigma(\xi-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}},$$

ce qui est aussi égal à

$$-\frac{1}{n-1}\,\frac{d}{du}\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n-1}{2}}\,[\Sigma(\xi-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}\right\}.$$

[*] Lu à la Société philosophique de Cambridge, le 6 mai 1833. (*Transactions*, tome V.)

Par cette dernière forme on voit que l'équation

$$\frac{d^2V}{du^2}+\sum\frac{d^2V}{dx^2}=0 \tag{7}$$

est satisfaite pour toutes les valeurs de x_1, x_2, etc., quand u n'est pas égal à zéro. Nous pouvons donc dire que pour toutes les valeurs de x_1, x_2, etc., et pour toutes les valeurs de u entre 0 et ∞, cette équation est satisfaite. Mais à ces limites il est bien facile de trouver la valeur de V, et c'est ce que nous allons maintenant faire, pour en déduire la valeur générale.

Quand $u=0$, la quantité sous les signes d'intégration, dans l'expression V, s'évanouit pour toutes les valeurs de ξ_1, ξ_2, etc., qui ne sont pas égales à x_1, x_2, etc.; d'où il suit que, dans ce cas,

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{u[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= \frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{dz_1\,dz_2\ldots dz_n}{(1+z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2)^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= \frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\frac{1}{2^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\frac{l_1^{-\frac{1}{2}}\,l_2^{-\frac{1}{2}}\ldots dl_1\,dl_2\ldots}{(1+l_1+l_2+\ldots+l_n)^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= \frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\infty}\frac{\frac{n}{2}h^{\frac{n}{2}-1}\,dh}{(1+h)^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{2}{[\Sigma(x-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}.
\end{aligned}$$

De plus, quand $u=\infty$, la valeur de V est zéro.

Ainsi, on voit que V a la même valeur que l'expression

$$\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+(u+u')^2]^{\frac{n-1}{2}}},$$

quand $u=0$, et quand $u=\infty$, pour toutes les valeurs de x_1, x'_1, x_2, etc., ce qui suffit pour en conclure que

$$V=\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{[\Sigma(x-x')^2+(u+u')^2]^{\frac{n-1}{2}}},$$

pour toutes les valeurs positives de u. En effet, le second membre de cette équation satisfait à l'équation (7) pour toutes les valeurs positives de u, en supposant u' une quantité positive, et aux limites

$$u=0 \quad \text{et} \quad u=\infty$$

la même valeur que V; d'où il suit, par un théorème de Green, démontré dans le Mémoire cité ci-dessus, que l'équation (7) doit subsister pour toutes les valeurs de u entre ces limites.

On peut déduire, de ce que nous venons de démontrer, la solution du problème suivant :

Étant donnée, pour toutes les valeurs de ξ_1, ξ_2,..., ξ_n, la valeur de l'intégrale multiple

$$(a)\qquad \mathrm{S}\,\frac{\rho'\,dx'_1\,dx'_2\ldots dx'_n}{[(x'_1-\xi_1)^2+(x'_2-\xi_2)^2+\ldots+(x'_n-\xi_n)^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}},$$

où u' et ρ' sont des fonctions quelconques de x'_1, x'_2,..., x'_n, soit proposé de trouver la valeur de

$$(b)\qquad \mathrm{S}\,\frac{\rho'\,dx'_1\,dx'_2\ldots dx'_n}{[(x'_1-x_1)^2+(x'_2-x_2)^2+\ldots+(x'_n-x_n)^2+(u'+u)^2]^{\frac{n-1}{2}}},$$

où x_1, x_2,..., x_n sont des quantités quelconques, et u une quantité positive.

En effet, en dénotant l'expression (a) par φ', et l'expression (b) par φ, nous avons, par le théorème démontré ci-dessus,

$$\varphi = \frac{u\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \mathbf{S}\rho' dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n+1}{2}}[\Sigma(\xi-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$= \frac{u\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \mathbf{S} \frac{\rho' dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n}{[\Sigma(\xi-x')^2+u'^2]^{\frac{n-1}{2}}},$$

ou

$$(c) \qquad \varphi = \frac{u\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{\varphi'.[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Mais, par hypothèse, φ' est donné pour toutes les valeurs de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; d'où il suit que l'équation (c) contient la solution du problème.

On peut aussi déduire de l'équation (5) l'expression

$$(d) \qquad \varphi = -\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n-1)\pi^{\frac{n+1}{2}}} \left[\int_{-\infty}^{\infty}\right]^n \frac{\frac{d\varphi'}{du'}[d\xi]^n}{[\Sigma(\xi-x)^2+u^2]^{\frac{n-1}{2}}},$$

par laquelle nous pouvons déterminer φ, quand on nous donne seulement la valeur de $\frac{d\varphi'}{du'}$.

Pour le cas particulier de

$$u' = 0,$$

ce théorème (d) est compris dans un théorème que Green a aussi donné, et où le nombre n qui entre dans l'exposant du dénominateur peut différer du nombre s des variables, la seule condition entre s et n étant

$$n - s + 1 > 0.$$

Mais c'est seulement dans le cas de

$$n = s$$

que le théorème général (d) a lieu.

Appliquons maintenant ces formules au cas de

$$n = 2,$$

et substituons x, y, z pour x_1, x_2, u, et ξ, η pour ξ_1, ξ_2.

Les équations (c) et (d) deviennent

$$(e) \qquad \varphi = \frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi'\, d\xi\, d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}},$$

et

$$(f) \qquad \varphi = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\frac{d\varphi'}{dz}\right) d\xi\, d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}},$$

où $\left(\frac{d\varphi'}{dz}\right)$ dénote la valeur de $\frac{d\varphi}{dz}$ dans le point $(\xi, \eta, 0)$.

La première de ces formules peut se déduire d'un théorème très-général que Green a donné dans son ouvrage intitulé : *Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism* [*].

On peut démontrer la seconde par la méthode suivante :

Considérons x', y', z' comme les coordonnées d'un point P', où il y a une quantité de matière $\rho'\, dx'\, dy'\, dz'$, attirante suivant la loi du carré inverse de la distance. La quantité φ sera le potentiel sur un point $P(x\, y\, z)$, *au-dessus* du plan (xy), d'une quantité de matière M distribuée d'une manière quelconque *au-dessous* de ce plan ou sur le plan. Maintenant on sait, par un théorème que Gauss a donné le premier pour une surface quelconque, qu'il y a une distribution déterminée d'une quantité de matière sur le plan (xy) qui produira le même potentiel que M, sur les points au-dessus de ce plan. Soit k la *densité*

[*] Nottingham, 1828. Cambridge, Deighton.

de cette distribution en un point $\Pi\,(\xi, \eta)$, de sorte que

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\, d\xi\, d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}},$$

ce qui donne

$$\frac{d\varphi}{dz} = -z\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\, d\xi\, d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Prenons maintenant $z = 0$, et soient k et $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_0$ les valeurs de k et de $\frac{d\varphi}{dz}$ au point $(x, y, 0)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_0 &= -k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\, d\xi\, d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{quand} \quad z = 0,\\ &= -k.2\pi,\end{aligned}$$

puisque la valeur de l'intégrale dans le second membre est $= 2\pi$, quel que soit z; et nous concluons que

$$k = -\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dz}\right),$$

d'où l'équation (f) se trouve démontrée.

On doit remarquer ici que la quantité totale de la matière distribuée sur le plan xy est égale à la quantité M, dont elle est représentative, comme on peut le vérifier facilement.

Il existe aussi une application de ces formules à la théorie de la chaleur. En effet, soit φ la température permanente d'un point P, d'un solide infini, échauffé par des sources quelconques distribuées sur le plan xy, ou en dessous. Si la température de chaque point Π du plan xy est donnée, la formule (e) nous conduit à déterminer la température d'un point quelconque P au-dessus de ce plan. Par exemple, supposons que la température d'une partie A de ce plan a une valeur constante c, et que la température à chaque point du plan qui ne se trouve pas dans A est égale à zéro, et considérons la partie A comme limitée par deux droites parallèles à l'axe de y, et situées à des distances égales à a, sur chaque côté de cet axe. Dans ce cas, la formule (e) devient

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{zc}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a}\frac{d\xi\, d\eta}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{c}{\pi}\left(\text{arc tang}\,\frac{x+a}{z}-\text{arc tang}\,\frac{x-a}{z}\right)\\ &= \frac{c}{\pi}\cdot\text{arc tang}\,\frac{2az}{x^2+z^2-a^2},\end{aligned}$$

d'où nous concluons que les surfaces isothermes qui correspondent à ce cas sont des cylindres à base circulaire. Soit AA′ la ligne d'intersection de la partie A du plan xy avec le plan xz. Les bases des cylindres isothermes sont les segments de cercles décrits sur la droite AA′.

On peut remarquer que cette application que nous avons donnée, et toutes les autres qui se rapportent aux cylindres isothermes, peuvent être déduites des formules générales en prenant

$$n = 1.$$

Paris, le 21 février 1845.