JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

B. AMIOT

Mémoire sur les diverses propriétés des surfaces du deuxième ordre déduites de la théorie des focales

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 109-136.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__109_0>

MÉMOIRE

SUR DIVERSES PROPRIÉTÉS

DES SURFACES DU DEUXIÈME ORDRE

DÉDUITES DE LA THÉORIE DES FOCALES;

Par B. AMIOT.

---

1. Dans un précédent Mémoire, qui a obtenu l'approbation de l'Académie des Sciences (*voyez* le tome VIII, page 161 de ce Journal), nous avons établi qu'il existe en général, pour toute surface du deuxième ordre, deux courbes qui jouissent de propriétés analytiques et géométriques analogues à celles des foyers dans les sections coniques. Nous nous étions attaché dans ce premier Mémoire à découvrir celles des propriétés de ces courbes qui correspondent aux propriétés essentiellement caractéristiques des foyers ordinaires. Dans celui-ci nous allons chercher à établir plusieurs théorèmes nouveaux qui correspondent à d'autres propriétés des foyers et qui étendent de plus en plus l'analogie entre les focales des surfaces et les foyers des courbes du deuxième degré. Nous ferons ensuite l'application de quelques-unes de ces propositions à la résolution de certains problèmes relatifs aux surfaces du deuxième ordre : on verra par là que les résultats de notre analyse peuvent devenir de quelque utilité dans les applications géométriques.

2. *Si l'on fait, sur une surface du deuxième ordre douée d'un centre, une section par un plan perpendiculaire à l'un quelconque des axes, et que, par les différents points de cette section, on mène des plans tangents à la surface, le lieu des pieds des perpendiculaires, abaissées de l'un des deux foyers conjugués à la section sur la direc-*

trice indéfinie de ces plans, est toujours un cercle dont le plan est perpendiculaire à celui de la focale.

Soit $\alpha\alpha'$ une section par un plan perpendiculaire au petit axe d'un ellipsoïde par exemple, et soient F_2, F'_2 les deux *foyers conjugués;* la perpendiculaire F_2P, abaissée du foyer F_2 sur le plan tangent à la surface en un point quelconque M de la section $\alpha\alpha'$, sera dans le plan des deux rayons vecteurs F_2M, F'_2M, puisque ce plan contient la normale à la surface au point M, et de plus, rencontrera le deuxième rayon vecteur F'_2M à une distance du point M égale au premier rayon vecteur F_2M, puisque ces deux rayons vecteurs sont également inclinés sur le plan tangent. Si donc on joint le pied P de la perpendiculaire F_2P au milieu N de la distance focale $F_2F'_2$, la ligne PN sera parallèle au deuxième rayon vecteur et égale à la demi-somme $\frac{r+r'}{2}$, qui est constamment $\frac{ax'}{\sqrt{a^2-c^2}}$. Or, si nous désignons par x, y, z les coordonnées de l'un quelconque des pieds P des perpendiculaires PF_2, la distance du point N, dont les coordonnées sont

$$x=0, \quad y=y' \quad \text{et} \quad z=0,$$

au point P, sera

$$\sqrt{x^2+(y-y')^2+z^2},$$

et, par conséquent, nous voyons déjà que tous les points P appartiennent à la sphère qui a pour équation

$$(1) \qquad x^2+(y-y')^2+z^2=\frac{a^2x'^2}{a^2-c^2}.$$

Si nous nommons x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point de tangence M, le plan tangent aura pour équation

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=1,$$

et l'on aura, pour déterminer la perpendiculaire F_2P, les équations

$$x-x'=\frac{c^2x_1}{a^2z_1}z, \quad y-y'=\frac{c^2y_1}{b^2z_1}z.$$

Par conséquent, les valeurs de x, y, z, communes à ces trois équations, appartiendront au pied P de la perpendiculaire. D'ailleurs, on a, entre les ordonnées y_1 du point M et y' du foyer F_2, la relation

$$y_1 = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2}.$$

Si donc on élimine x_1, y_1, z_1 entre ces quatre équations, on aura une nouvelle équation en x, y, z qui appartiendra à une surface sur laquelle seront situés tous les points tels que P. Des trois dernières on déduit

$$y_1 = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2}, \quad z_1 = -\frac{c^2 y' z}{(y - y')(c^2 - b^2)} \quad \text{et} \quad x_1 = -\frac{a^2 y'(x - x')}{(y - y')(c^2 - b^2)};$$

et, en substituant ces valeurs dans la première, on obtient

$$(2) \qquad x(x - x') + y(y - y') + z^2 + \frac{c^2 - b^2}{y'}(y - y') = 0.$$

équation d'une deuxième sphère qui passe par le point F_2 et par le point N, milieu de la distance focale $F_2 F'_2$, car elle est vérifiée pour

$$x = x', \quad y = y', \quad z = 0,$$

ainsi que pour

$$x = 0, \quad y = y', \quad z = 0.$$

Elle a, d'ailleurs, son centre situé dans le plan des xy, qui est celui de la focale, et par conséquent le lieu de tous les points tels que, P étant l'intersection des sphères (1) et (2), notre théorème se trouve complétement démontré.

3. On pourrait déterminer directement le centre et le rayon de la sphère (2), mais on y parvient plus aisément de la manière suivante :

En retranchant les équations (1) et (2), on a la projection sur le plan des xy du cercle d'intersection des deux sphères, c'est-à-dire l'équation du diamètre de ce cercle,

$$xy'x' - (y - y')(y'^2 + c^2 - b^2) = \frac{a^2 y' x'^2}{a^2 - b^2},$$

qui devient

$$(3) \qquad xy'(a^2 - c^2) - yx'(c^2 - b^2) = (a^2 + b^2 - c^2)x'y'.$$

attendu que de l'équation de la focale

$$\frac{y'^2}{c^2 - b^2} - \frac{x'^2}{a^2 - c^2} = -1,$$

on déduit

$$y'^2 + c^2 - b^2 = \frac{(c^2 - b^2)x'}{a^2 - c^2}.$$

D'ailleurs, la tangente à la focale menée par le point F'_2, dont les coordonnées sont y' et x', a pour équation

$$\frac{y'y}{c^2 - b^2} + \frac{x'x}{a^2 - c^2} = -1, \tag{4}$$

et l'on s'assure aisément que les équations (3) et (4) appartiennent à deux droites perpendiculaires entre elles. On voit, en outre, que l'équation (3) est vérifiée par les valeurs

$$x = x', \quad \text{et} \quad y = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2},$$

qui déterminent le point où le prolongement de l'ordonnée du foyer F_2 coupe l'axe de la section $\alpha\alpha'$. Donc enfin :

Si par le point N, milieu de la distance focale et centre de la première sphère, on mène une parallèle à la tangente à la focale passant par le deuxième foyer F'_2, cette droite contiendra, 1° le centre de la deuxième sphère au point où elle sera rencontrée par la perpendiculaire élevée sur le milieu de NF_2, et 2° le centre du cercle d'intersection des deux sphères au point où elle sera rencontrée par la perpendiculaire abaissée sur sa direction du point d'intersection de l'ordonnée du foyer F_2 et de l'axe de la section $\alpha\alpha'$.

4. Le même théorème et la même construction sont encore applicables aux deux paraboloïdes, mais seulement pour des sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe. Pour les autres sections, on a le théorème suivant :

Si dans un paraboloïde quelconque on fait une section $\alpha\alpha'$ par un plan parallèle à l'axe et perpendiculaire au plan d'une focale (un des plans diamétraux principaux), *puis que l'on mène par les différents* *points de cette section des plans tangents à la surface, le lieu des pieds de toutes les perpendiculaires, abaissées du* FOYER CONJUGUÉ *sur la direction indéfinie de tous ces plans, est une droite perpendiculaire au plan de la focale et passant par le milieu de la distance du foyer conjugué au pied de l'axe directeur correspondant.*

Soient x', y' les coordonnées du foyer F_2, et x_1, y_1, z_1 celles d'un point quelconque M de la section $\alpha\alpha'$ d'un paraboloïde elliptique par un plan parallèle à l'axe et perpendiculaire au plan diamétral principal dont la section a le plus grand paramètre. On aura entre y_1 et y' la relation

$$y_1 = \frac{py'}{p-p'},$$

et la perpendiculaire abaissée du foyer F_2 sur le plan tangent en M aura pour équations

$$x-x' = -\frac{p'}{z_1}z, \qquad y-y' = \frac{p'y_1}{pz_1}.$$

Si entre ces trois équations on élimine y_1 et z_1, on aura une nouvelle équation en x, y, z qui contiendra toutes les perpendiculaires abaissées du foyer F_2 sur les différents plans tangents à la surface en chacun des points de la section $\alpha\alpha'$. Pour cela, je substitue, dans la troisième équation, les valeurs de y_1 et z_1 fournies immédiatement par les premières, et j'obtiens

$$(y-y')(p-p') + (x-x')y' = 0,$$

équation d'un plan perpendiculaire à celui de la focale passant par le foyer F_2 et contenant l'axe directeur. Elle est, en effet, vérifiée pour

$$x = x', \qquad y = y',$$

coordonnées du foyer, et pour

$$x = x' - p', \quad y = \frac{py'}{p-p'},$$

coordonnées du pied de la directrice.

D'ailleurs, une certaine perpendiculaire F_2P rencontre l'axe directeur en un point G situé sur la parallèle à l'axe de la surface menée par le point M, et l'on a

$$MF_2 = MG;$$

de plus, le plan tangent divise en deux parties égales l'angle de ces deux droites. Donc il passe par le milieu de sa perpendiculaire F_2G, et, par suite, le lieu des pieds de toutes ces perpendiculaires est une droite parallèle à l'axe directeur et passant par le milieu de la distance F_2D_2.

5. Le lieu de toutes ces droites est évidemment une surface cylindrique dont la base, située dans le plan de la focale, est le lieu des droites qui joignent les différents points de la focale aux pieds des axes directeurs correspondants. Or les coordonnées de l'un de ces points, de celui qui correspond au foyer F_2, sont

$$\xi = x' - \frac{p'}{2} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{y'}{2} + \frac{py'}{2(p-p')},$$

d'où l'on déduit

$$x' = \xi + \frac{p'}{2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{2\eta(p-p')}{2p-p'}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la focale qui est

$$y'^2 = (p-p')(2x'-p'),$$

on obtient

$$\eta^2 = \frac{(2p-p')^2}{p-p'}\xi,$$

équation d'une parabole qui a même sommet que le paraboloïde.

6. *Si dans une surface quelconque du deuxième ordre on fait une section par un plan perpendiculaire à l'un des axes, et que, par un point de cette section, on mène un plan tangent à la surface, le rectangle des perpendiculaires, abaissées des deux foyers conjugués à la section sur ce plan tangent, reste constant quel que soit le point de la section par lequel on a mené le plan tangent; et, lorsqu'on passe d'une section à une section parallèle, ce rectangle varie proportionnellement au carré de la distance des deux foyers conjugués correspondants.*

Considérons toujours la section $\alpha\alpha'$ faite sur un ellipsoïde par un plan perpendiculaire au petit axe, et soient x', y' les coordonnées du foyer conjugué F_2, celles du deuxième foyer F'_2 seront $-x'$, y', et nous aurons pour la longueur des perpendiculaires d, d' abaissées de ces deux points sur un plan tangent en un point $x_1 y_1 z_1$ quelconque de la surface

$$d = \frac{\frac{x'x_1}{a^2} + \frac{y'y_1}{b^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}, \quad d' = \frac{-\frac{x'x_1}{a^2} + \frac{y'y_1}{b^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}}.$$

Les coordonnées du point de tangence satisfont à la relation

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1,$$

et pour exprimer que ce point appartient à la section $\alpha\alpha'$, dont F_2 et F'_2 sont les foyers conjugués, on a les deux relations

$$y_1 = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2}, \quad \frac{y'^2}{c^2 - b^2} - \frac{x'^2}{a^2 - c^2} = -1;$$

d'où l'on déduit aisément

$$\frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4} = \frac{x'^2}{c^2(a^2 - c^2)} - \frac{x_1^2}{a^2 c^2} \quad \text{et} \quad y_1 y' = 1 - \frac{x'^2}{a^2 - c^2}.$$

Or, on a

$$dd' = \frac{\left(\frac{y'y_1}{b^2} - 1\right)^2 - \frac{x'^2 x_1^2}{a^4}}{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}} = \frac{\frac{x'^4}{(a^2 - c)^2} - \frac{x'^2 x_1^2}{a^4}}{\frac{x'^2}{a^2 - c^2} - \frac{x_1^2(a^2 - c^2)}{a^4 c^2}},$$

et, par suite,

$$dd' = \frac{c^2 x'^2 \left[\frac{x'^2}{(a^2 - c^2)^2} - \frac{x_1^2}{a^4}\right]}{(a^2 - c^2)\left[\frac{x'^2}{(a^2 - c)^2} - \frac{x_1^2}{a^4}\right]} = \frac{c^2 x'^2}{a^2 - c^2}.$$

Par un calcul tout à fait semblable, on trouve pour le paraboloïde

$$dd' = \frac{p' y'^2}{p - p'},$$

et, par conséquent, dans toute surface du deuxième ordre, le rectangle dd' varie proportionnellement au carré de la demi-distance des foyers F_2, F'_2.

7. Si nous désignons par r et r' les deux rayons vecteurs menés du point M aux deux foyers conjugués, on a, dans l'ellipsoïde,

$$\frac{r+r'}{2} = \frac{ax'}{\sqrt{a^2-c^2}},$$

et, par suite,

$$dd' : \left(\frac{r+r'}{2}\right)^2 :: c^2 : a^2.$$

Dans le paraboloïde,

$$\frac{r+r'}{2} = y'\sqrt{\frac{p}{p-p'}},$$

d'où résulte

$$dd' : \left(\frac{r+r'}{2}\right)^2 :: p' : p.$$

8. En ajoutant les deux valeurs de d et d' du n° **6**, on trouve facilement

$$\frac{d+d'}{2} = \frac{\frac{y_1y'}{b^2}-1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}}} = \frac{\frac{acx'^2}{a^2-c^2}}{\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}\left[\frac{a^4x'^2}{(a^2-c^2)^2}-x_1^2\right]}}$$

D'ailleurs, si l'on fait le rectangle des deux rayons vecteurs r et r', on trouve immédiatement

$$rr' = \frac{a^2-c^2}{a^2}\left[\frac{a^4x'^2}{(a^2-c^2)^2}-x_1^2\right],$$

et, par suite, on a

$$rr'\left(\frac{d+d'}{2}\right)^2 = \frac{a^2c^2x'^4}{(a^2-c^2)^2}.$$

On trouve aussi

$$dd'\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2 = \frac{a^2c^2x'^4}{(a^2-c^2)^2},$$

et par conséquent

$$\frac{d+d'}{2} : \frac{r+r'}{2} :: \sqrt{dd'} : \sqrt{rr'};$$

c'est-à-dire que :

Si l'on mène un plan tangent à une surface du deuxième ordre en un point M *quelconque et que l'on joigne ce point aux deux foyers conjugués, puis que l'on abaisse de ces mêmes foyers des perpendiculaires sur le plan tangent, les moyennes arithmétiques des rayons vecteurs et des perpendiculaires seront constamment proportionnelles aux moyennes géométriques de ces mêmes lignes.*

Ceci, du reste, est une conséquence facile à déduire géométriquement de ce que les rayons vecteurs r, r' sont situés dans le plan des deux perpendiculaires d, d' et également inclinés sur le plan tangent.

9. Abaissons du centre de l'ellipsoïde une perpendiculaire δ sur le même plan tangent, nous aurons

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}}} = \frac{ac}{\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}\left[\frac{a^4x'^2}{(a^2-c^2)^2} - x_1^2\right]}},$$

d'après les formules du n° 6.

En comparant cette valeur à celle du rectangle rr' du numéro précédent, nous avons

$$\delta^2 . rr' = a^2c^2,$$

ou bien

$$\delta : a :: c : \sqrt{rr'},$$

relation qui a pareillement lieu dans une ellipse dont les demi-axes sont a et c.

10. Désignons par n la longueur comptée sur la normale à partir du point de tangence M jusqu'à celui où cette droite rencontre le plan de la focale. On a

$$n = \sqrt{\frac{c^4x_1^2}{a^4} + (y_1 - y)^2 + z_1^2},$$

et si l'on remplace dans cette expression z_1, y_1 et y' par leurs valeurs (n° 6), on trouve aisément

$$n^2 = \frac{c^2(a^2-c^2)}{a^4}\left[\frac{a^4x'^2}{(a^2-c^2)^2} - x_1^2\right].$$

On en déduit

$$(1) \qquad \frac{n^2}{rr'} = \frac{c^2}{a^2}, \qquad \text{ou bien} \qquad a : c :: \sqrt{rr'} : n.$$

Pour un paraboloïde on trouve, par un calcul en tout semblable,

$$(2) \qquad \frac{n^2}{rr'} = \frac{p'}{p}.$$

Donc, si nous appelons la quantité désignée par n la longueur de la normale, on voit que :

Dans toute surface du deuxième ordre le carré de la longueur de la normale en un point quelconque reste dans un rapport constant avec le rectangle des deux rayons vecteurs menés de ce même point aux deux foyers conjugués.

11. En désignant par ν l'angle de la normale avec chacun des deux rayons vecteurs menés d'un point M quelconque aux deux foyers conjugués, nous avons trouvé

$$\text{tang } \nu = \frac{a^2-c^2}{b^2c^2x'}\sqrt{b^4z_1^2 + c^4y_1^2}.$$

Or, si nous remplaçons dans cette formule z_1 et y_1 par leurs valeurs (6), nous avons

$$\text{tang } \nu = \frac{a^2-c^2}{cx'}\sqrt{\frac{x'^2}{a^2-c^2} - \frac{x_1^2}{a^2}},$$

et nous en déduisons

$$\cos^2 \nu = \frac{c^2x'^2}{\frac{(a^2-c^2)^2}{a^2}\left[\frac{a^4x'^2}{(a^2-c^2)^2} - x_1^2\right]}.$$

En multipliant cette valeur par celle de n^2 du numéro précédent, on obtient

$$n \cos \nu = \frac{c^2x'}{a\sqrt{a^2-c^2}}.$$

Ainsi : *Dans toute surface du deuxième ordre douée d'un centre, la projection de la longueur de la normale en un point quelconque sur l'un des rayons vecteurs correspondants reste constante pour tous les points d'une même section faite par un plan perpendiculaire à l'un des axes, et varie, quand on passe d'une section à une autre section parallèle, proportionnellement à la distance des deux foyers conjugués.*

Pour la section principale dont les demi-axes sont a et c, on a

$$x' = \sqrt{a^2 - c^2},$$

et, par suite,

$$n \cos \varphi = \frac{c^2}{a},$$

relation connue et facile à obtenir directement pour une ellipse quelconque.

12. Soit V l'angle que fait la normale en un point quelconque M d'un paraboloïde avec l'axe de cette surface, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{1}{pp'} \sqrt{p^2 z_1^2 + p'^2 y_1^2},$$

d'où résulte

$$\cos V = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y_1^2}{p^2} + \frac{z_1^2}{p'^2}}}.$$

Or, si l'on remplace z_1 par sa valeur tirée de l'équation de la surface, et x_1 par sa valeur en fonction de l'abscisse x' des deux foyers conjugués à la section faite par un plan mené par le point M perpendiculairement à l'axe de la surface, on trouve aisément

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{\frac{2x' - p'}{p'} - \frac{y_1^2(p - p')}{p^2 p'}}};$$

et comme, d'après l'équation de la focale,

$$2x' - p' = \frac{y'^2}{p - p'},$$

on obtient enfin

$$\cos \varphi = \frac{p}{\sqrt{\frac{p - p'}{p'}\left[\frac{p^2 y'^2}{(p - p')^2} - y_1^2\right]}}.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par r et r' les deux rayons vecteurs menés du point M aux deux foyers conjugués, on a

$$rr' = \frac{p-p'}{p}\left[\frac{p^2y'^2}{(p-p')^2} - y_1^2\right],$$

et, par conséquent, il vient

$$rr'\cos^2 \nu = pp'.$$

Si nous multiplions cette équation par l'équation (2) du nº **10**, nous obtenons

$$n\cos\nu = p',$$

ce qui montre que: *Pour chaque point d'un paraboloïde quelconque, la projection de la normale sur l'axe de la surface est constamment égale au demi-paramètre de la section principale qui ne contient pas la seconde extrémité de la normale n.*

13. Représentons par R_1 et R_2 les deux rayons de courbure principaux en un point xyz quelconque d'une surface du second ordre; on sait que l'on a généralement

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

et

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

p, q, r, s et t désignant, selon l'usage, les dérivées partielles des deux premiers ordres de l'ordonnée z prises par rapport à x et y.

Pour l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on trouve

$$p = -\frac{c^2x}{a^2z}, \qquad q = -\frac{c^2y}{b^2z},$$

$$r = -\frac{c^2(a^2z^2+c^2x^2)}{a^4z^3}, \quad s = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}, \quad t = -\frac{c^2(b^2z^2+c^2y^2)}{b^4z^3},$$

et, en substituant ces valeurs dans la premiere des deux formules générales précédentes, on obtient

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{(a^2z^2+c^2x^2)(b^2z^2+c^2y^2)-c^4x^2y^2}{a^4b^4c^4z^2\left(\frac{z^2}{c^4}+\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^2} = \frac{\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}}{a^2b^2c^2\left(\frac{z^2}{c^4}+\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^2} = \frac{\delta^4}{a^2b^2c^2},$$

δ représentant la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent xyz.

La formule

$$\frac{1}{RR_1} = \frac{\delta^4}{a^2b^2c^2}$$

a été donnée par M. Dupin dans ses *Développements de Géométrie*. On y introduira les rayons vecteurs r', r en observant qu'on a (nº **9**)

$$\delta^2 = \frac{a^2c^2}{rr'},$$

et, partant,

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{a^2c^2}{b^2(rr')^2}.$$

Si nous posons

$$\frac{a^2}{b} = P \quad \text{et} \quad \frac{c^2}{b} = P',$$

nous aurons

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{PP'}{r^2r'^2}, \quad \text{ou bien} \quad r^2r'^2 = PP' \times R_1R_2.$$

Pour le paraboloïde elliptique, on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{p'}{z}, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{p'y}{pz};$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{p'}{z^3}, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{p'y}{pz^3}, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{2p'^2x}{pz^3},$$

et si l'on substitue ces valeurs dans la même formule, on trouve

$$\frac{1}{R_1R_2} = \frac{1}{pp'\left(1+\frac{y^2}{p^2}+\frac{z^2}{p'^2}\right)} = \frac{\cos^4\varphi}{pp'};$$

et comme

$$\cos^4\varphi = \frac{p^2p'^2}{r^2r'^2},$$

on obtient enfin

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{pp'}{r^2 r'^2}, \quad \text{ou bien} \quad r^2 r'^2 = pp' \times R_1 R_2.$$

Donc : *En chaque point d'une surface quelconque du deuxième ordre, le rectangle des deux rayons de courbure principaux est proportionnel au produit des carrés des deux rayons vecteurs menés de ce même point aux deux foyers conjugués correspondants.*

En admettant, avec M. Gauss, que la courbure d'une surface en un point quelconque soit mesurée par la fonction $\frac{1}{R_1 R_2}$, on voit qu'en chaque point d'une surface quelconque du deuxième ordre la courbure est également mesurée par l'inverse du produit des carrés des deux rayons vecteurs menés de ce point aux deux foyers conjugués correspondants.

14. Si l'on substitue les mêmes valeurs de p, q, r,... dans la deuxième formule générale du numéro précédent, on aura, pour le paraboloïde d'abord,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{p + p' + 2x}{pp'\left(1 + \frac{y^2}{p^2} + \frac{z^2}{p'^2}\right)} = \pm \frac{p + p' + 2x}{pp'} \cos^3 \nu ;$$

d'où résulte

$$R_1 + R_2 = \pm \frac{p + p' + 2x}{\cos \nu},$$

et, par suite,

$$R_1 \cos \nu + R_2 \cos \nu = \pm (p + p' + 2x),$$

ce qui montre *qu'en chaque point d'un paraboloïde situé sur une section perpendiculaire à l'axe, la somme des projections des deux rayons de courbure principaux sur l'axe reste constante, et que pour chaque section, elle est égale à la somme des deux demi-paramètres principaux et du double de la distance du plan sécant au sommet de la surface.*

On trouve de la même manière, pour l'ellipsoïde,

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=-\frac{[z^2(a^2b^4+a^4b^2)+x^2(b^4c^2+b^2c^4)+y^2(a^2c^4+a^4c^2)]}{a^4b^4c^4\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{\delta^3[(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2z^2+b^2c^2x^2+b^2c^2y^2)-a^2b^2c^2(x^2+y^2+z^2)]}{a^4b^4c^4};$$

et si l'on nomme q la distance du centre de l'ellipsoïde au point xyz, on a enfin

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R^2}=\frac{\delta^3(a^2+b^2+c^2-q^2)}{a^2b^2c^2}:$$

si l'on remplace dans cette formule $\frac{1}{R_1R_2}$ par la valeur du numéro précédent, on a

$$R_1+R_2=\frac{a^2+b^2+c^2-q^2}{\delta};$$

formule que M. Dupin a aussi donnée.

15. Passons à un autre ordre de propriétés, et, pour cela, concevons un cône circonscrit à une surface du deuxième ordre. On sait que la courbe de contact est plane et que le plan de cette courbe est dit le plan POLAIRE correspondant au sommet S du cône, lequel est le POLE du même plan. Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un certain pôle S, le plan polaire correspondant, par rapport à l'ellipsoïde par exemple, aura pour équation

(P) $$\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}=1.$$

Considérons une droite quelconque représentée par les deux équations

(D) $$\begin{cases} x=mz+p, \\ y=nz+q, \end{cases}$$

et supposons que le pôle S soit situé sur cette droite, nous aurons

$$\xi=m\zeta+p,\quad \eta=n\zeta+q,$$

et l'équation (P) devient

$$\frac{x}{a^2}(m\zeta+p)+\frac{y}{b^2}(n\zeta+q)+\frac{z\zeta}{c^2}=1.$$

16..

Pour un deuxième pôle S′ situé en un point ξ', η', ζ', de la même droite, on trouvera pareillement

$$\frac{x}{a^2}(m\zeta' + p) + \frac{y}{b^2}(n\zeta' + q) + \frac{z\zeta}{c^2} = 1\,;$$

et si l'on soustrait ces deux équations l'une de l'autre, il vient

$$(\mathrm{P}') \qquad \frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} + \frac{z}{c^2} = 0,$$

plan conjugué à la droite (D); par conséquent on a, pour déterminer la ligne d'intersection des deux plans polaires correspondants aux deux pôles S et S′, les deux équations (P) et (P′) qui sont, comme on voit, complétement indépendantes de la position de chacun des deux pôles S et S′ sur la droite (D); ainsi les différents points d'une droite quelconque étant considérés comme des pôles, tous les plans polaires correspondants se coupent suivant une seule et même droite située dans le plan diamétral conjugué à la droite des pôles S et S′.

16. Pour obtenir la projection de cette droite sur le plan focal, j'élimine z entre les deux équations (P) et (P′), ce qui me donne l'équation

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1,$$

p et q représentant les coordonnées du point où la droite (D) rencontre le plan des xy, et par conséquent la droite représentée par l'équation (I) est *polaire* du pied de la droite (D) par rapport à la section principale de l'ellipsoïde faite par le plan focal des xy.

17. Supposons maintenant que la droite (D) menée par le pôle S soit perpendiculaire au plan polaire correspondant (P), les équations de cette droite seront

$$x - \xi = \frac{\xi c^2}{\zeta a^2}(z - \zeta), \quad y - \eta = \frac{\eta c^2}{b^2 \zeta}(z - \zeta),$$

et l'on aura, pour les coordonnées du point où elle rencontre le plan des xy,

$$p = \frac{\xi(a^2 - c^2)}{a^2}, \quad q = \frac{\eta(b^2 - c^2)}{b^2}.$$

Par suite, l'équation (I) deviendra

$$\frac{y\eta(c^2-b^2)}{b^4}-\frac{x\xi(a^2-c^2)}{a^4}=-1.$$

En comparant cette équation à celle de la synfocale

$$\frac{y^2(c^2-b^2)}{b^4}-\frac{x^2(a^2-c^2)}{a^4}=-1,$$

on voit que la même projection de la droite d'intersection des différents plans polaires correspondants aux points de la droite (D) est la *polaire* par rapport à la synfocale de la projection sur le plan focal des xy du pôle S par lequel on a mené la droite (D) perpendiculaire sur le plan polaire correspondant. Donc généralement :

Un point S *étant considéré comme le pôle d'un plan* P *par rapport à une surface quelconque du deuxième ordre, si de ce pôle on abaisse une perpendiculaire indéfinie sur le plan polaire correspondant* P, *puis que l'on considère un nouveau point* S′ *quelconque de cette perpendiculaire et le plan polaire* P′ *correspondant, les deux plans polaires* P *et* P′ *se couperont suivant une droite invariable, dont la projection sur le plan focal sera* POLAIRE *à la fois de la projection sur le même plan du premier pôle* S *par rapport à la synfocale, et du pied de la perpendiculaire* D *par rapport à la section principale correspondante de la surface.*

18. Si nous supposons le pôle S situé sur la surface proposée, le plan polaire correspondant devient le plan tangent, et la perpendiculaire D à ce plan est la normale à la surface en S. Du théorème précédent nous pouvons donc déduire le suivant que, du reste, on démontrerait directement de la même manière :

Si par un point M *quelconque d'une surface du deuxième ordre on mène le plan tangent et la normale, puis que l'on circonscrive à cette même surface un cône ayant pour sommet un point quelconque de la normale, le plan de la ligne de contact* (plan polaire du sommet du cône) *rencontrera le plan tangent suivant une droite invariable dont la projection sur le plan focal sera* POLAIRE *à la fois de la projection sur le même plan du point de tangence* M *par rapport à la synfocale,* *et du pied de la normale par rapport à la section principale correspondante de la surface proposée.*

19. La trace du plan polaire (P) sur le plan de la focale a pour équation

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1.$$

Or, p et q désignant les coordonnées du point où la perpendiculaire, abaissée du pôle S sur ce plan, coupe celui de la focale, on a

$$\xi = \frac{a^2 p}{a^2 - c^2}, \quad \eta = \frac{b^2 q}{b^2 - c^2},$$

et, par suite, la trace du plan polaire devient

$$\frac{qy}{c^2 - b^2} - \frac{px}{a^2 - c^2} = -1,$$

équation de la polaire du point (pq) par rapport à la focale.

Donc: *Si d'un point quelconque* S, *considéré comme pôle par rapport à un plan* P, *on abaisse une perpendiculaire* (D) *sur ce plan, la trace du plan* P *sur le plan focal sera la polaire, par rapport à la focale, de la trace de la perpendiculaire* D *sur ce même plan.*

Et par conséquent : *Si l'on mène à une surface du deuxième ordre un plan tangent et une normale en un même point quelconque* M, *la trace du plan tangent sur le plan d'une focale sera polaire par rapport à cette courbe, du pied de la normale.*

20. Revenons à la droite (D) du n° **15**, et supposons qu'elle passe par un point quelconque D_1 de la synfocale. En désignant par x' et y' les coordonnées du foyer conjugué F_1, on aura, pour le point D_1,

$$p = X = \frac{a^2 x'}{a^2 - c^2} \quad \text{et} \quad q = Y = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (I) du n° **16**, on trouve

$$\frac{yy'}{c^2 - b^2} - \frac{xx'}{a^2 - c^2} = -1,$$

équation de la tangente à la focale au point $x'y'$ de cette courbe.

Si l'on supposait, au contraire, la droite (D) menée par un point $x'y'$ de la focale, on aurait, en désignant par X et Y les coordonnées du point conjugué D_1 de la synfocale,

$$p = x' = \frac{X(a^2-c^2)}{a^2}, \quad q = y' = -\frac{Y(c^2-b^2)}{b^2},$$

et, par suite, l'équation (I) deviendrait

$$\frac{Yy(c^2-b^2)}{b^4} - \frac{Xx(a^2-c^2)}{a^4} = -1,$$

équation de la tangente à la synfocale au point D_1 de cette courbe.

Donc généralement : *Le point* S *étant un pôle et* P *le plan polaire correspondant par rapport à une surface quelconque du deuxième ordre, si le pôle* S *se meut dans l'espace en restant constamment sur une droite* D *menée par un point* D_1 *de la synfocale, le plan polaire* P *tournera autour d'une droite fixe dont la projection sur le plan focal sera tangente à la focale au foyer* F_1 *conjugué du point* D_1 *de la synfocale; et réciproquement, si la droite* D, *lieu des pôles, passe par le foyer* F_1, *la ligne d'intersection des plans polaires se projettera sur la tangente à la synfocale au point* D_1 *conjugué du foyer* F_1.

21. Si nous considérons le cas où le pôle S coïncide avec le point F_1, intersection de la focale et de la droite D, le plan polaire correspondant, évidemment perpendiculaire au plan focal, déterminera par sa trace sur ce plan la projection de la droite fixe du théorème précédent. D'ailleurs, cette même intersection, tangente à la synfocale au point D_1, sera polaire du foyer conjugué F_1 par rapport à la section principale correspondante de la surface. Il en sera de même quand on supposera le pôle S situé au point D_1 de la synfocale.

Donc généralement : *Les différents points d'une focale d'une surface quelconque du deuxième ordre étant considérés comme des pôles par rapport à la section principale correspondante de la surface, la synfocale est* L'ENVELOPPE *de toutes les polaires correspondantes; et réciproquement, la focale est* L'ENVELOPPE *de toutes les polaires des différents points de la synfocale considérés comme pôles par rapport à la même section principale de la surface.*

22. Si nous supposons que la droite D soit l'axe directeur lui-même, on aura, pour les deux coordonnées ξ, η du pôle S situé en un point quelconque de cette droite,

$$\xi = \frac{a^2 x'}{a^2 - c^2}, \quad \eta = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2},$$

et, par conséquent, la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan polaire correspondant rencontrera le plan de la focale au point qui a pour coordonnées

$$p = \frac{\xi(a^2 - c^2)}{a^2} = x' \quad \text{et} \quad q = \frac{\eta(b^2 - c^2)}{b^2} = y',$$

c'est-à-dire au point F_1 de la focale, foyer conjugué du pied D_1 de l'axe directeur qui contient le pôle S.

D'ailleurs, les équations (P) et (P′) du n° **15** se réduisent à

$$\frac{yy'b^2}{c^2 - b^2} - \frac{xx'a^2}{a^2 - b^2} = -1 \quad \text{et} \quad z = 0;$$

par conséquent, la ligne d'intersection des différents plans polaires correspondants aux divers points de la directrice DD_1 est la tangente à la focale aux points F_1.

Donc généralement : *Si un point* S, *considéré comme pôle d'un plan* P *par rapport à une surface du deuxième ordre, se déplace en occupant successivement les différents points d'un axe directeur quelconque* DD_1, *tous les plans polaires correspondants se couperont suivant la tangente à la focale au foyer conjugué* F_1, *et la droite qui unira ce point à un pôle quelconque* S *sera perpendiculaire au plan polaire correspondant.*

23. Lorsque le pôle S occupera le pied D_1 de la directrice, c'est-à-dire un point de la synfocale, le plan polaire correspondant sera visiblement perpendiculaire au plan de cette courbe, et, par conséquent, du théorème précédent résulte le théorème suivant, démontré par M. Cauchy (voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XIV, page 809 et suivantes):

Le foyer F_1 *coïncide toujours avec le pied de la perpendiculaire abais-*

sée du pôle D_1 (point conjugué de la synfocale) *sur le plan polaire correspondant à ce même pôle.*

Nous voyons, en outre, que la droite qui joint chaque point D_1 de la synfocale au foyer conjugué F_1 est normale à la synfocale en ce point.

24. Soit S un pôle quelconque dont je représente les coordonnées par ξ, η, ζ; le plan polaire correspondant P coupera l'axe directeur DD_1 en un point D'_1 qui aura pour coordonnées

$$X = \frac{a^2x'}{a^2 - c^2},\quad Y = -\frac{b^2y'}{c^2 - b^2},\quad Z = \frac{c^2}{\zeta}\left(1 - \frac{\xi x'}{a^2 - c^2} + \frac{\eta y'}{c^2 - b^2}\right),$$

x', y' représentant les coordonnées du foyer conjugué F_1. Or, menons de ce dernier point deux droites, l'une au pôle S, et l'autre au point D'_1, intersection du plan polaire et de l'axe directeur; elles auront pour équations

$$(F_1S)\qquad x - x' = \alpha z,\quad y - y' = 6z,$$
$$(F_1D'_1)\qquad x - x' = \alpha' z,\quad y - y' = 6' z,$$

avec

$$\alpha = \frac{\xi - x'}{\zeta},\quad 6 = \frac{\eta - y'}{\zeta},$$

et

$$\alpha' = \frac{\zeta\frac{y'}{c^2 - b^2}}{1 - \frac{\zeta x'}{a^2 - c^2} - \frac{\eta y'}{c^2 - b^2}},\quad 6' = \frac{\zeta\frac{y'}{c^2 - b^2}}{1 - \frac{\xi x'}{a^2 - c^2} + \frac{\eta y'}{c^2 - b^2}};$$

et si l'on substitue ces valeurs de α, α', 6 et $6'$ dans la formule qui exprime la perpendicularité de deux droites, on trouve

$$\alpha\alpha' + 66' + 1 = \frac{\frac{y'^2}{c^2 - b^2} - \frac{x'^2}{a^2 - c^2} - \frac{\eta y'}{c^2 - b^2} + \frac{\xi x'}{a^2 - c^2}}{1 - \frac{\xi x'}{a^2 - c^2} + \frac{\eta y'}{c^2 - b^2}} + 1 = -1 + 1 = 0,$$

attendu que, d'après l'équation de la focale,

$$\frac{y'^2}{c^2 - b^2} - \frac{x'^2}{a^2 - c^2} = -1.$$

Donc généralement : *Si l'on conçoit un cône circonscrit à une surface du deuxième ordre, et que l'on prolonge le plan de la ligne de contact jusqu'à ce qu'il coupe l'axe directeur* DD_1 *en un point* D'_1, *les deux droites qui joignent ce point et le sommet* S *du cône au foyer* F_1 *correspondant se coupent toujours à angle droit, quelle que soit la position du cône circonscrit.*

25. Lorsque le point S est situé sur la surface, le plan polaire correspondant est le plan tangent, et par conséquent :

Étant mené le plan tangent en un point M *quelconque d'une surface du deuxième ordre, le rayon vecteur qui joint le point de contact* M *à un point quelconque* F_1 *de la focale est perpendiculaire à la droite menée de ce même point* F_1 *à celui où le plan tangent coupe l'axe directeur correspondant.*

26. Concevons un cône circonscrit à une surface du deuxième ordre et ayant le point S pour sommet, le plan de la ligne de contact convenablement prolongé coupera en un point D'_1 l'axe directeur correspondant au foyer F_1; il coupera généralement aussi en deux points M et M′ la section $\alpha\alpha'$ de la surface *conjuguée* au foyer F_1. Menons la droite $F_1D'_1$ et un plan perpendiculaire à cette droite passant par le sommet du cône et le foyer F_1, la droite suivant laquelle ce plan coupera le plan $MM'F_1$ et la droite $F_1D'_1$ diviseront respectivement en parties égales l'angle et le supplément de l'angle des deux rayons vecteurs MF_1 et $M'F_1$.

En effet, les deux distances MD'_1 et $M'D'_1$, visiblement proportionnelles aux perpendiculaires abaissées des points M et M′ sur l'axe directeur DD'_1, sont par conséquent aussi proportionnelles aux deux rayons vecteurs MF_1 et $M'F_1$, et par conséquent la droite $F_1D'_1$ intercepte sur la base du triangle $MM'F_1$ des segments proportionnels aux côtés. D'ailleurs, cette même droite est perpendiculaire à la ligne d'intersection du plan du triangle $MM'F_1$ et du plan que nous avons mené perpendiculairement à sa propre direction par les points F_1 et S. Donc, etc.

De plus, cette intersection du plan du triangle $MM'F_1$ par celui que nous avons mené est la projection sur le premier de la droite SF_1, et par conséquent aussi :

La droite qui joint le sommet S *du cône au foyer* F_1 *fait, dans l'espace, des angles égaux avec les deux rayons vecteurs* MF_1 *et* $M'F_1$.

Si nous supposons le sommet S du cône situé dans le plan du triangle MF_1M', la droite SF_1 se confondra avec sa projection sur ce plan, et l'on démontrera aisément que :

Toute tangente à la surface, comprise entre les deux tangentes MS *et* M'S, *sera vue du foyer* F_1 *sous un angle constamment égal à la moitié de l'angle des deux rayons vecteurs* MF_1 *et* $M'F_1$.

27. Admettons que le sommet S du cône circonscrit coïncide avec le point F_1 de la focale, le plan polaire correspondant contiendra l'axe directeur DD_1 conjugué au foyer F_1, et chaque génératrice F_1M du cône circonscrit sera perpendiculaire à la droite menée du même foyer F_1 au point où le plan tangent à la surface en M, lequel contiendra la génératrice F_1M, coupera l'axe directeur DD_1. Soit F_1M' une autre génératrice quelconque du même cône, et soit D' le point où le plan MF_1M' prolongé coupe l'axe directeur DD_1; de ce que les carrés des rayons vecteurs MF et M'F sont proportionnels aux rectangles des perpendiculaires abaissées des points M et M' sur les plans directeurs conjugués au foyer F_1 (*voir* notre premier Mémoire), on déduit aisément que ces mêmes rayons vecteurs sont proportionnels aux perpendiculaires abaissées des mêmes points M et M' sur l'axe directeur DD_1, et, par suite, aux deux distances MD' et M'D'. D'ailleurs, si l'on projette sur le plan MFM' la tangente F_1I, menée à la focale par le point F_1, la projection sera perpendiculaire sur la droite F_1D', et par conséquent divisera en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs F_1M et F_1M'. Donc aussi ces deux rayons vecteurs formeront des angles égaux avec la tangente F_1I, et par conséquent :

Chaque point F_1, *appartenant à une focale d'une surface du deuxième ordre, est le sommet d'un cône de révolution circonscrit à cette surface et ayant pour axe la tangente à la focale au même point.*

Nous sommes ainsi ramené au théorème de M. Steiner sur les focales.

28. Les résultats auxquels nous sommes parvenu peuvent servir à résoudre divers problèmes relatifs aux surfaces du deuxième ordre.

Nous en indiquerons l'application à quelques-unes des principales questions que l'on traite ordinairement en géométrie descriptive, et nous terminerons par un problème qui, nous le pensons du moins, n'a encore été résolu que pour des cas très-particuliers, celui de mener une normale à une surface du deuxième ordre par un point donné quelconque. (*Voyez* un Mémoire de M. Joachimstal sur les normales à l'ellipse et à l'ellipsoïde; Journal de M. Crelle, tome XXVI, deuxième cahier.)

29. PREMIER PROBLÈME. — *Connaissant le sommet* S *d'un cône circonscrit à une surface du deuxième ordre, déterminer le plan de la ligne de contact; et réciproquement, étant donné le plan de la ligne suivant laquelle un cône touche une surface, trouver le sommet de ce cône.*

1°. Je joins le point donné S à un point quelconque F_1 de la focale, et soit D_1 le point conjugué de la synfocale; je mène par le point F_1 un plan perpendiculaire à la droite SF_1, lequel coupera l'axe directeur $D_1D'_1$ en un point du plan cherché (n° **22**). On obtiendra de même deux autres points de ce plan, et le problème sera résolu.

2°. Soient F_1 un point pris arbitrairement sur la focale, D_1 le point conjugué de la synfocale, et $D_1D'_1$ l'axe directeur correspondant, qui coupe le plan donné en un certain point D'_1; j'unis ce point au foyer F_1 et je mène par ce dernier point un plan perpendiculaire à la droite $F_1D'_1$, ce plan contiendra le point cherché S. En répétant la même construction pour deux autres points de la focale, on aura trois plans dont l'intersection sera le point S.

30. DEUXIÈME PROBLÈME. — *Construire l'intersection d'une surface du deuxième ordre,* 1° *par un plan;* 2° *par une ligne donnée.*

1°. On peut considérer le plan donné comme étant celui de la ligne suivant laquelle la surface proposée est touchée par un cône circonscrit dont on pourra commencer par déterminer le sommet S. Soient un certain foyer F_1, D_1 le point conjugué de la synfocale et D'_1 le point d'intersection du plan donné par l'axe directeur correspondant; je construis la droite $F_1D'_1$ par laquelle je mène un plan parallèle à l'axe de la focale, et soit D'_1M la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan donné; je construis au point F_1 un plan perpendiculaire à la droite F_1D, lequel coupe la droite D'_1M en un certain point C. Je prends ensuite sur la même droite D'_1M deux points M et M' tels que, les quatre segments MD'_1, M'K, MK et $M'D'_1$ formant une proportion harmonique, les deux points M et M' appartiennent à la courbe cherchée. On obtiendra pareillement autant de points que l'on voudra, et, par suite, on pourra tracer la courbe elle-même.

Si le plan donné est perpendiculaire au plan focal, sa trace coupera la section principale correspondante de la surface suivant une droite qui sera l'un des axes de la courbe cherchée. Le deuxième axe sera une perpendiculaire mM au plan focal élevée par le milieu m du premier. On mènera donc par ce point m une parallèle à l'axe de la focale qui coupera la synfocale en un point D_1; on déterminera les deux foyers conjugués F_1 et F'_1, et l'on prendra sur la perpendiculaire mM un point M tel, que la somme des distances MF_1 et MF'_1 soit égale à $\frac{2ax'}{\sqrt{a^2-c^2}}$, quantité facile à construire, puisque l'on connaît la distance $2x'$ des deux foyers F_1 et F'_1 : la longueur mM sera le deuxième axe de la courbe cherchée.

2°. Par la droite donnée on mènera un plan perpendiculaire à un plan focal, et l'on construira la courbe d'intersection de la surface par ce plan; les points cherchés seront ceux où cette courbe est rencontrée par la droite proposée.

51. TROISIÈME PROBLÈME. — *Mener un plan tangent à une surface du deuxième ordre,* 1° *par un point donné sur la surface;* 2° *passant par une droite donnée;* 3° *parallèle à un plan connu.*

1°. Soit M le point donné, on mènera par ce point un plan perpendiculaire au plan de la focale et parallèle à l'axe de cette courbe; la trace de ce plan coupera la synfocale en un point D_1 dont on construira les deux foyers conjugués F_1 et F'_1; on mènera les deux rayons vecteurs MF_1, MF'_1, et la bissectrice de l'angle $F_1MF'_1$ sera la normale à la surface au point M. Il ne restera plus qu'à construire le plan perpendiculaire à cette droite au point donné.

2°. Soit SS' la droite donnée par laquelle on veut mener le plan tangent; je prends à volonté sur cette droite deux points S et S' que je considère comme les sommets de deux cônes circonscrits à la surface, et je détermine (premier problème) la ligne suivant laquelle se coupent les plans des lignes de contact de ces deux cônes avec la surface proposée. Les points où cette droite coupe la surface sont les points de contact, et le problème se trouve ramené au premier cas.

3°. On substitue aux deux cônes S et S' deux cylindres ayant leurs génératrices respectivement parallèles à deux droites tracées arbitrairement dans le plan donné.

Pour obtenir le plan de la ligne de contact de la surface et d'un cylindre dont la génératrice est parallèle à une droite donnée, on prendra trois points à volonté sur la focale, on déterminera les points respectivement conjugués de la synfocale et l'on construira les trois axes directeurs correspondants; on déterminera l'intersection de chacune de ces droites avec un plan mené par le foyer conjugué perpendiculairement à la direction donnée de la génératrice du cylindre; on aura ainsi trois points du plan cherché. Donc, etc.

32. QUATRIÈME PROBLÈME. *Mener par un point donné quelconque une normale à une surface du deuxième ordre.*

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point donné S, les coordonnés x_1, y_1, z_1 du point M où la normale coupe la surface, satisfont aux deux équations

$$\xi - x_1 = \frac{c^2 x_1}{a^2 z_1}(\zeta - z_1),$$

$$\eta - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(\xi - x_1).$$

Or, soient α, β les coordonnées du point inconnu N où la normale prolongée rencontre le plan de la focale, nous avons entre α, β et x_1, y_1, les relations

$$x_1 = \frac{a^2\alpha}{a^2 - c^2} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{b^2\beta}{b^2 - c^2}.$$

En substituant ces valeurs dans la deuxième des équations précédentes, on a le lieu des pieds des normales menées à la surface par les différents points d'une perpendiculaire abaissée d'un point S sur le plan des xy. On trouve ainsi

$$\alpha 6 (a^2 - b^2) = (a^2 - c^2) \xi 6 + (c^2 - b^2) \eta \alpha, \tag{1}$$

hyperbole qui passe par le centre de la surface et qui a pour asymptotes des parallèles aux axes des x et des y.

On obtient de la même manière, pour le lieu des points d'intersection avec le plan des xz, de toutes les normales à la surface menée par les différents points d'une perpendiculaire abaissée du point S sur le même plan,

$$\alpha \gamma (a^2 - c^2) = (a^2 - b^2) \xi \gamma + (b^2 - c^2) \zeta \alpha, \tag{2}$$

nouvelle hyperbole aussi facile à construire que la première. Concevons maintenant deux cônes ayant pour sommet commun le point donné S et pour bases respectives les hyperboles (1) et (2), la ligne d'intersection de ces deux cônes sera évidemment la normale cherchée. Pour construire cette ligne, on déterminera d'abord l'intersection du deuxième cône par le plan focal, ce qui donnera encore une hyperbole passant également par le centre de la surface. Le point d'intersection de cette dernière hyperbole et de la première sera la trace N sur le plan focal de la normale cherchée.

D'après la position du point donné S, que nous supposerons d'abord en dehors de chacun des trois plans diamétraux principaux de la surface, l'hyperbole (1) pourra être rencontrée en un point unique, en deux ou même en trois points, autres que le centre de la surface qui ne peut convenir à la question, par la trace du deuxième cône sur le plan de la focale; chacun de ces points sera généralement le pied d'une normale qui satisfera à l'énoncé.

Supposons le point donné S situé dans le plan focal, par exemple intérieurement à l'ellipsoïde. Soit SM une normale menée par ce point, le plan tangent en M aura pour trace sur le plan focal la polaire du point donné S par rapport à la focale (n° **19**). On tracera donc cette droite, et le problème sera ramené à construire un plan tangent passant par une droite connue. Comme on pourra mener par cette droite deux plans tangents à la surface, on aura aussi deux normales partant de S et se terminant en deux points M et M′ symétriquement placés sur la section $\alpha\alpha'$ conjuguée aux points de la focale situés sur une parallèle à l'axe menée par le point S.

D'ailleurs, toute normale menée du point S à la courbe d'intersection de la surface par le plan focal sera aussi normale à la surface elle-même, et comme on peut généralement mener d'un point quatre normales à une section conique, on en obtiendra, dans ce cas, six pour la surface.

Si nous supposons enfin le point donné S, toujours dans le plan focal, mais placé de telle sorte que les foyers situés sur une parallèle à l'axe menée par ce point soient conjugués à une *section imaginaire* de la surface, il ne restera plus d'autres normales que celles que l'on pourra mener du point donné à l'intersection de la surface par le plan focal; et quant au problème de mener une normale à une section conique par un point donné, on connaît l'élégante construction donnée par M. Poncelet. (Voir le *Traité des Propriétés projectives des figures*.)