JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

Propriétés géométriques et mécaniques de quelques courbes remarquables

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 97-112.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__97_0>

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES

DE QUELQUES COURBES REMARQUABLES;

PAR M. OSSIAN BONNET,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

I.

Problème. « Étant donnée une chaîne parfaitement flexible et
» homogène, mais d'inégale épaisseur, dont tous les éléments sont
» soumis à l'action de forces centrales inversement proportionnelles à
» la distance, trouver la loi suivant laquelle doit varier l'épaisseur
» en chaque point et la courbe que doit affecter la chaîne dans l'état
» d'équilibre, pour que, dans cet état, la tension varie d'un point à
» l'autre proportionnellement à l'épaisseur, ou que la chaîne présente
» partout égale chance à la rupture. »

Solution. Soit a le rapport constant qui existe entre l'épaisseur ω et la tension T en chaque point de la chaîne dans l'état d'équilibre; appelons $R = f(r)$ l'intensité de la force centrale donnée, que nous supposons d'abord fonction quelconque de la distance, nous aurons pour l'équilibre d'un quelconque des éléments de la chaîne,

$$d.\left(T\frac{dx}{ds}\right) = \pm aTR\frac{x}{r}\,ds,$$

$$d.\left(T\frac{dy}{ds}\right) = \pm aTR\frac{y}{r}\,ds;$$

le centre des forces étant pris pour origine des coordonnées, et le signe des seconds membres étant $+$ ou $-$, selon que les forces sont attractives ou répulsives.

Ajoutons les deux équations précédentes, après les avoir respectivement multipliées d'abord par $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$, puis par $-y$ et x; il viendra

$$dT = \pm aTRdr, \qquad d\left[T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)\right] = 0,$$

d'où, intégrant,

$$(1) \qquad T = Ce^{\pm a\int Rdr}, \quad T\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = C'.$$

L'avant-dernière équation nous fait déjà connaître la tension en chaque point de la chaîne dans l'état d'équilibre; on en déduit aisément l'épaisseur

$$(2) \qquad \omega = aT = aCe^{\pm a\int Rdr}.$$

Pour avoir ensuite l'équation de la courbe d'équilibre de la chaîne, il suffit d'éliminer T entre les équations (1); on trouve ainsi

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = \frac{C'}{C}e^{\mp a\int Rdr},$$

et, en passant aux coordonnées polaires,

$$\frac{r^2 d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = \frac{C'}{C}e^{\mp a\int Rdr},$$

d'où

$$d\theta = \frac{dr}{r\sqrt{\frac{C^2}{C'^2}r^2 e^{\pm 2a\int Rdr} - 1}},$$

d'où, intégrant,

$$(3) \qquad \theta + \alpha = \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{C^2}{C'^2}r^2 e^{\pm 2a\int Rdr} - 1}}.$$

Les constantes introduites par les intégrations sont faciles à interpréter: si les deux quadratures qui entrent dans le second membre de l'équation (3) sont l'une et l'autre prises à partir du pied de la normale menée par l'origine à la courbe représentée par cette équation (3), les constantes $-\alpha$, $\frac{C'}{C}$, C ne seront autre chose, respectivement, que les valeurs de θ, r, T qui répondent à ce point; et quant à la constante a, on sait qu'elle exprime le rapport constant qui existe entre l'épaisseur et la tension en chaque point de la chaîne dans l'état d'équilibre. Il est presque inutile de dire que les quatre constantes dont il s'agit se déterminent dans chaque cas particulier en exprimant que la chaîne passe par deux points, qu'elle a entre ces points une longueur déterminée, et enfin qu'elle a en un point une épaisseur connue.

II.

Sortons maintenant des généralités précédentes pour nous occuper exclusivement du cas où la force est inversement proportionnelle à la distance.

Posons donc

$$f(r) = \frac{1}{r},$$

l'unité de force étant celle qui agit à l'unité de distance; les équations (2) et (3) deviendront

$$(4) \qquad \omega = a\mathrm{T}_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\pm a}, \qquad \theta - \theta_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(1\pm a)} - 1}},$$

en prenant, comme on l'a dit plus haut, les intégrales à partir du pied de la normale menée de l'origine à la courbe qu'affecte la chaîne dans l'état d'équilibre, et appelant θ_0, r_0, T_0 les valeurs respectives de θ, r, T en ce point.

L'intégrale contenue dans le second membre de la dernière équation s'évalue aisément en posant

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1\pm a} = \text{séc}\,\varphi, \quad \text{d'où} \quad \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(1\pm a)} - 1}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{1 \pm a} = \frac{\varphi}{1 \pm a},$$

et l'on trouve pour cette équation :

$$(5) \qquad r^{1\pm a}\cos(1 \pm a)(\theta - \theta_0) = r_0^{1\pm a};$$

ce qui nous montre que les courbes d'équilibre de la chaîne dans le cas considéré ne sont autre chose que les courbes remarquables que

M. Serret a considérées pour la première fois, dans le tome VII de ce *Journal*, et dont les arcs représentent, dans un grand nombre de cas, les intégrales eulériennes de seconde espèce. On sait que ces courbes renferment comme cas particulier le cercle, l'hyperbole équilatère, la lemniscate, etc. Du reste, la valeur de a d'où dépend la nature de la courbe d'équilibre, de même que les valeurs de θ_0 et r_0, se déterminera dans chaque cas particulier, ainsi qu'on l'a dit plus haut, en exprimant que la courbe passe par deux points, et qu'elle a entre ces points une longueur connue.

III.

Reprenons la première des équations (4),

$$\omega = a\mathrm{T}_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\pm a}. \tag{6}$$

Cette équation nous fait connaître l'épaisseur en chaque point de la chaîne en fonction de r ou de la distance de l'origine au point considéré, dans la position d'équilibre. On peut encore exprimer l'épaisseur en chaque point en fonction du volume de la chaîne compris entre ce point et un point déterminé; et la formule que l'on obtient à cet effet, d'une forme assez remarquable, a l'avantage de s'appliquer quelle que soit la position qu'occupe la chaîne, lorsque par conséquent elle est étendue en ligne droite sur un plan.

Prenons pour axe polaire la normale à la courbe (5) menée par l'origine, et posons, pour simplifier,

$$1 \pm a = m, \qquad a\mathrm{T}_0 = \omega_0,$$

les équations (5) et (6) deviendront

$$r^m \cos m\theta = r_0^m, \tag{7}$$

$$\omega = \omega_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{m-1}. \tag{8}$$

Nous tirons de l'avant-dernière équation la différentielle de l'arc qu'affecte la chaîne

$$ds = r_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{m+1} d\theta,$$

d'où, pour le volume compté à partir de l'axe polaire,

$$V = \omega_0 r_0 \int_0^\theta \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m} d\theta = \omega_0 r_0 \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2 m\theta} = \frac{\omega_0 r_0}{m} \operatorname{tang} m\theta;$$

éliminant θ entre cette équation et l'équation (8), qui revient à

$$\frac{\omega_0}{\omega} = (\cos m\theta)^{\frac{m-1}{m}},$$

on trouve

$$(9) \qquad V^2 = \frac{\omega_0^2 r_0^2}{m^2}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{2m}{m-1}} - 1\right],$$

pour l'équation cherchée. Cette équation, après que les constantes ω_0, r_0 et m ont été déterminées, donne le volume de la chaîne en fonction de l'épaisseur au point où l'on s'arrête, et réciproquement.

Cette même équation peut servir à déterminer la forme de la chaîne.

Assimilons cette chaîne étendue en ligne droite sur un plan au volume engendré par un cercle de rayon variable qui se meut parallèlement à lui-même en touchant par les extrémités d'un même diamètre une droite et une courbe; et proposons-nous de déterminer l'équation de cette courbe directrice. Soient y_0 le diamètre initial du cercle générateur, et $y + y_0$ le diamètre lorsque ce cercle a parcouru sur la ligne droite l'espace x, nous aurons

$$V = \frac{\pi}{4}\int_0^x (y + y_0)^2\, dx, \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{4} y_0^2, \qquad \omega = \frac{\pi}{4}(y + y_0)^2;$$

portant ces valeurs dans l'équation (9), il vient

$$\int_0^x (y + y_0)^2 dx = \frac{r_0 y_0^2}{m}\sqrt{\left(\frac{y + y_0}{y_0}\right)^{\frac{4m}{m-1}} - 1},$$

d'où, différentiant,

$$(10) \qquad dx = \frac{2 r_0}{y_0 (m-1)} \frac{\left(\frac{y + y_0}{y_0}\right)^{\frac{m+3}{m-1}} dy}{\sqrt{\left(\frac{y + y_0}{y_0}\right)^{\frac{4m}{m-1}} - 1}},$$

et intégrant,

$$(11)\qquad x = \frac{2r_0}{y_0(m-1)}\int_0^y \frac{\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{\frac{m+3}{m-1}} dy}{\sqrt{\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{\frac{4m}{m-1}} - 1}}.$$

La quadrature contenue dans le second membre de la dernière équation est une intégrale binôme qui ne peut être évaluée, d'après les principes connus, que lorsque $\frac{m+1}{2m}$ ou $\frac{1}{2m}$ est un nombre entier; la première condition est remplie pour $m = -1$, la seconde pour $m = \pm\frac{1}{2}$: pour la première de ces valeurs de m, l'équation (7) représente une circonférence; pour les deux autres, elle représente une parabole dont le foyer est à l'origine, et une épicycloïde extérieure, ayant pour module $\frac{1}{2}$. Si dans ces trois cas on effectue l'intégration, on trouve successivement pour l'équation (11),

$$(y + y_0)\cos\frac{x}{r_0} = y_0,$$

$$\frac{x}{r_0} = \left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{-2}\left[\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{-4} - 1\right]^{\frac{1}{2}} + \log\left\{\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{-2} + \left[\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{-4} - 1\right]^{\frac{1}{2}}\right\},$$

$$\left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^4\left[1 - \left(\frac{x}{2r_0}\right)^2\right]^3 = 1.$$

Mais, sans nous arrêter à ces cas particuliers, qui, comme l'on voit, conduisent à des résultats assez compliqués, remarquons que l'on peut, quel que soit m, avoir la courbe représentée par l'équation (10) ou (11), par une construction géométrique. En effet, posons

$$(m+1)x = u,\quad \left(\frac{y+y_0}{y_0}\right)^{\frac{2(m+1)}{m-1}} = \frac{v}{r_0},$$

l'équation (10) deviendra

$$(12)\qquad du = \frac{dv}{\sqrt{\left(\frac{v}{r_0}\right)^{\frac{2m}{m+1}} - 1}},$$

et il est clair que si l'on peut construire la courbe représentée par cette dernière équation, on pourra aussi avoir, par une construction géométrique, autant de points que l'on voudra de la courbe représentée par l'équation (10).

Or, je dis que si l'on fait rouler sur une ligne droite la courbe représentée par l'équation (7), le centre de cette courbe décrira une courbe comprise dans l'équation (12).

Pour le faire voir, remarquons que r et θ étant les coordonnées polaires d'un point quelconque d'une courbe, prises par rapport à un axe et à une origine arbitraires, mais invariablement liés à cette courbe, et x et y les coordonnées rectangles du point qui sert d'origine, quand on a fait rouler la courbe sur l'axe des x, de manière que le contact ait lieu au point dont les coordonnées sont r et θ, on a

$$(13) \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{rd\theta}{dr}, \quad y = \frac{r^2 d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}.$$

Or, supposons que la courbe qu'on fait rouler soit celle que représente l'équation (7), on aura alors

$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m} - 1}}, \quad \frac{r^2 d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = r_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1-m},$$

par conséquent

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2m} - 1}}, \quad y = r_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1-m},$$

d'où, éliminant $\frac{r}{r_0}$,

$$(14) \qquad dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{2m}{1-m}} - 1}},$$

équation qui est bien comprise dans l'équation (12).

On peut déduire de là quelques résultats connus. Si l'on fait

$$\frac{2m}{1-m} = -1, \quad \text{ou} \quad m = -1,$$

l'équation (14) devient celle d'une cycloïde, et l'équation (7) celle d'un cercle; nous retombons donc sur la propriété caractéristique de la cycloïde. Si

$$\frac{2m}{1-m} = 2, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{1}{2},$$

l'équation (14) devient celle d'une chaînette et l'équation (7) celle d'une parabole rapportée à son foyer, d'où l'on peut conclure que, lorsqu'on fait rouler une parabole sur une droite, le foyer de cette parabole décrit une chaînette. Si l'on pose

$$\frac{2m}{1-m} = -4, \quad \text{d'où} \quad m = 2,$$

l'équation (14) devient celle d'une courbe élastique rectangulaire, et l'équation (7) celle d'une hyperbole équilatère rapportée à ses axes; nous pouvons donc dire que le centre d'une hyperbole équilatère roulant sur une droite, décrit une courbe élastique rectangulaire, etc.

IV.

Si, au lieu de faire rouler sur une droite la courbe représentée par l'équation (7), on fait rouler une courbe parallèle à cette dernière, on obtient un résultat très-simple et qui ne diffère que très-peu de celui que nous avons obtenu en faisant rouler la courbe (7).

Rappelons d'abord que les géomètres appellent courbes parallèles à une courbe donnée, les lieux des points obtenus en prenant sur toutes les normales de cette courbe, et à partir des points de contact, une même longueur a.

Cela étant, on voit aisément que ξ et η étant les coordonnées rectangles d'un point quelconque de la courbe parallèle à la courbe (7), on a

$$\xi = r\cos\theta + a\cos(m-1)\theta,$$
$$\eta = r\sin\theta - a\sin(m-1)\theta;$$

ou, en appelant ρ et φ les coordonnées polaires correspondantes aux coordonnées rectangles ξ et η,

$$\rho e^{\varphi\sqrt{-1}} = re^{\theta\sqrt{-1}} + ae^{-(m-1)\theta\sqrt{-1}}, \tag{15}$$

$$\rho e^{-\varphi\sqrt{-1}} = re^{-\theta\sqrt{-1}} + ae^{(m-1)\theta\sqrt{-1}}, \tag{16}$$

avec la condition

$$r^m \cos m\theta = r_0^m. \tag{17}$$

Reprenons maintenant les équations (13) qui, en changeant r en ρ et θ en φ, deviennent

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\rho d\varphi}{d\rho}, \qquad y = \frac{\rho^2 d\varphi}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2}}; \tag{18}$$

et éliminons r, θ, ρ et φ entre ces deux équations et les équations (15), (16) et (17).

De l'égalité (15), nous tirons d'abord

$$\begin{aligned} e^{\varphi\sqrt{-1}} d\rho + \rho e^{\varphi\sqrt{-1}}\sqrt{-1}\, d\varphi = e^{\theta\sqrt{-1}} dr \\ + re^{\theta\sqrt{-1}}\sqrt{-1}\, d\theta - (m-1) a e^{-(m-1)\theta\sqrt{-1}}\sqrt{-1}\, d\theta, \end{aligned}$$

d'où, multipliant par l'équation (16) et égalant respectivement les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres,

$$\rho d\rho = rdr - (m-1) ar \sin m\theta\, d\theta + a\cos m\theta\, dr - ar \sin m\theta\, d\theta,$$

$$\begin{aligned} \rho^2 d\varphi = r^2 d\theta - (m-1) ar\cos m\theta\, d\theta + a \sin m\theta\, dr \\ + ar\cos m\theta\, d\theta - (m-1) a^2 d\theta; \end{aligned}$$

simplifiant, au moyen de l'équation

$$\cos m\theta\, dr = r \sin m\theta\, d\theta,$$

que l'on déduit de l'équation (17), il vient

$$\rho d\rho = dr[r - (m-1) a \cos m\theta],$$

$$\rho^2 d\varphi = \frac{(r\cos m\theta + a)[r - (m-1) a\cos m\theta]\, d\theta}{\cos m\theta} = \frac{(r\cos m\theta + a)[r - (m-1) a \cos m\theta]\, dr}{r \sin m\theta}.$$

Nous tirons de là

$$\frac{\rho d\varphi}{d\rho} = \frac{r\cos m\theta + a}{r\sin m\theta};$$

d'ailleurs les équations (15) et (16), multipliées l'une par l'autre, donnent

$$\rho^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos m\theta;$$

substituant dans les équations (18), en remarquant que la seconde de ces équations revient à

$$\rho = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

à cause de la première, on trouve

$$r\sin m\theta = y\frac{dy}{dx}, \qquad r\cos m\theta = y - a,$$

d'où enfin, au moyen de l'équation (17),

$$dx = \frac{ydy}{(y-a)\sqrt{\left(\frac{y-a}{r_0}\right)^{\frac{2m}{1-m}} - 1}}.$$

Cette équation, quand on fait $a = 0$, devient l'équation (14), comme cela doit être. On en tire divers résultats plus ou moins curieux en faisant varier m. Si, par exemple, on fait $m = 2$, auquel cas la courbe (17) est une hyperbole équilatère, on trouve pour l'équation de courbe engendrée

$$dx = \frac{\frac{y(y-a)}{r_0^2}dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{y-a}{r_0}\right)^4}}.$$

V.

Les courbes représentées par l'équation (12), qui comprennent comme cas particulier la cycloïde, s'obtiennent en généralisant plusieurs propriétés de cette courbe.

On sait que dans la cycloïde le rayon de courbure est double de la normale; proposons-nous de trouver plus généralement la courbe dans laquelle le rayon de courbure est égal à m fois la normale : nous aurons pour l'équation différentielle de la courbe cherchée.

$$\frac{1+p^2}{q} = my, \quad \text{ou} \quad \frac{q}{1+p^2} = \frac{1}{m}\frac{1}{y}.$$

Multipliant les deux membres par $2dy$, et observant que

$$qdy = \frac{dp}{dx}dy = pdp,$$

il viendra

$$\frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{2}{m}\frac{dy}{y},$$

d'où, intégrant,

$$1 + p^2 = Cy^{\frac{2}{m}},$$

d'où

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{Cy^{\frac{2}{m}} - 1}},$$

équation de même forme que l'équation (12).

De même, la cycloïde étant la courbe de plus vite descente dans le vide, l'intégrale

$$\int \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

doit être un minimum pour la cycloïde; or, les courbes comprises dans l'équation (12) rendent minimum l'intégrale plus générale

$$\int y^n \sqrt{1+p^2}\,dx,$$

ainsi qu'on peut le voir dans le *Methodus inveniendi*, etc., page 50.

On obtient des courbes, dont celles que représente l'équation (12) ne sont que des cas particuliers, en généralisant d'autres propriétés de la cycloïde.

Ainsi, proposons-nous de trouver la courbe dans laquelle le rayon de courbure ρ est dans un rapport constant avec la puissance n de l'ordonnée. Nous aurons d'abord

$$\frac{q}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = ay^{-n},$$

d'où, multipliant par $2dy$ et intégrant,

$$(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{C} + \mathrm{C}'y^{1-n},$$

d'où

$$dx = \frac{(\mathrm{C}+\mathrm{C}'y^{1-n})\,dy}{\sqrt{1-(\mathrm{C}+\mathrm{C}'y^{1-n})^2}}, \tag{19}$$

équation qui rentre dans l'équation (14) quand on fait $\mathrm{C} = 0$.

On sait que l'on trouve la cycloïde en cherchant la courbe pour laquelle l'espace compris entre elle et sa développée est le plus petit, c'est-à-dire en cherchant la courbe pour laquelle l'intégrale

$$\int \rho\, ds = \int \frac{(1+p^2)^2}{q}\, dx$$

est minimum.

Si plus généralement on se propose de trouver la courbe pour laquelle l'intégrale

$$\int \rho^n\, ds = \int \frac{(1+p^2)^{\frac{3n+1}{2}}}{q^n}\, dx$$

est minimum, on trouve une courbe comprise dans l'équation (19).

Euler, qui, dans le *Methodus inveniendi*, etc., page 66, a résolu ce dernier problème, n'a pas remarqué que sa solution coïncidait avec la courbe dans laquelle il existe un rapport constant entre le rayon de courbure et une puissance de l'ordonnée.

Voici un moyen simple d'établir cette coïncidence :

La courbe dont l'ordonnée rend minimum l'intégrale

$$\int \frac{(1+p^2)^{\frac{3n+1}{2}}}{q^n}\, dx,$$

a pour équation différentielle, d'après la méthode des variations,

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3n+1}{2}}}{q^n} = C + C'p - n\,\frac{(1+p^2)^{\frac{3n+1}{2}}}{q^n},$$

ou

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3n+1}{2}}}{q^n} = C + C'p.$$

Si ρ est le rayon de courbure de la courbe cherchée, on a

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

donc

$$\rho^n = \frac{C + C'p}{\sqrt{1+p^2}}$$

peut être considérée comme l'équation de la courbe; de là on tire

$$n\rho^{n-1}\,d\rho = \frac{(C - C'p)}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\,dp\,;$$

et comme

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

on a

$$n\rho^n\,d\rho = \frac{C-C'p}{q}\,dp = (C - C'p)\,dx = Cdx - C'dy,$$

d'où

$$\rho^{n+1} = Cx + C'y + C'',$$

équation qui, en changeant convenablement la position et la direction des axes, peut se ramener à la forme

$$\rho^{n+1} = ay, \quad \text{ou} \quad \rho = a^{\frac{1}{n+1}}\,y^{\frac{1}{n+1}},$$

ce que nous nous étions proposé de faire voir.

VI.

Cherchons la développée de la courbe représentée par l'équation (12), ou plus simplement par l'équation

$$(20) \qquad dx = \frac{dy}{\sqrt{y^m - 1}}.$$

Soient x, y les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe, ρ le rayon de courbure en ce point, et α, β les coordonnées du centre de courbure au même point; on aura

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{dx}{dy}, \quad d\alpha^2 + d\beta^2 = d\rho^2.$$

Or, de l'équation (20) on déduit

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^m - 1}}, \quad \text{et} \quad \rho = \frac{2}{m}\, y^{\frac{m+2}{2}},$$

d'où

$$d\rho = \frac{m+2}{m}\, y^{\frac{m}{2}}\, dy:$$

on a donc

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{y^m - 1}}, \quad d\alpha^2 + d\beta^2 = \left(\frac{m+2}{m}\right)^2 y^m dy^2,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\beta}{1} = -\frac{d\alpha}{\sqrt{y^m - 1}} = \sqrt{\frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{y^m}} = \frac{m+2}{m}\, dy,$$

d'où

$$d\beta = \frac{m+2}{m}\, dy, \quad \text{et} \quad \beta = \frac{m+2}{m}\, y + \mathrm{C},$$

et

$$d\alpha = \frac{m+2}{m}\, dy\, \sqrt{y^m - 1} = d\beta \sqrt{\left(\frac{m}{m+2}\beta - \mathrm{C}\right)^m - 1}.$$

Si l'on porte l'axe des β parallèlement à lui-même, de manière à faire disparaître la constante C, et qu'on mette x et y en place de α et β, il viendra

$$dx = dy\sqrt{\left(\frac{m}{m+2}y\right)^m - 1}.$$

Cette équation représente une courbe semblable à celle qui a pour équation

$$dx = dy\sqrt{y^m - 1}, \tag{21}$$

et qui est évidemment la trajectoire orthogonale des courbes comprises dans l'équation (14).

Les courbes que l'on vient d'obtenir et dont l'équation peut toujours se ramener à la forme (21), quoique moins remarquables que celles que représente l'équation (20), jouissent de plusieurs propriétés assez curieuses; comme ces dernières, elles comprennent la cycloïde, et on les obtient en généralisant plusieurs propriétés de cette courbe. Ainsi, ces courbes sont celles pour lesquelles une puissance quelconque de l'arc est proportionnelle à l'abscisse. Or, on sait que la cycloïde est la courbe pour laquelle le carré de l'arc est proportionnel à l'abscisse. La propriété de tautochronisme dont jouit la cycloïde montre que, pour cette courbe, l'intégrale

$$\int_0^h \frac{ds}{\sqrt{h-x}}$$

est indépendante de h; plus généralement les courbes représentées par l'équation (21) sont celles pour lesquelles l'intégrale

$$\int_0^h (h-x)^n\, ds$$

est indépendante de h. C'est ce que l'on reconnaît aisément, soit par la méthode qu'a exposée Poisson (Voir sa *Mécanique*, tome I[er], page 373), soit par le calcul des différentielles à indices fractionnaires de M. Liouville, etc.

VII.

Je terminerai en rappelant une propriété de minimum dont jouissent les courbes (7) et qui a été indiquée par Euler dans le *Méthodus inveniendi,* etc., page 53. D'après cette propriété, les courbes (7) sont celles pour lesquelles l'intégrale

$$\int r^n\, ds = \int r^n \sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2}$$

est un minimum. En effet, la méthode des variations nous donne pour l'équation différentielle des dernières courbes

$$r^n \sqrt{r^2 + r'^2} = \mathrm{C} + \frac{r^n r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}},$$

d'où

$$r^{n+2} = \mathrm{C} \sqrt{r^2 + r'^2},$$

d'où

$$d\theta = \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^{2(n+1)}}{\mathrm{C}^2} - 1}},$$

d'où, en intégrant comme au § II,

$$r^{n+1} \cos(n+1)(\theta - \theta_0) = \mathrm{C}.$$