JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P.-H. BLANCHET

Mémoire sur les ondes successives

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 73-96.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__73_0>

MÉMOIRE

SUR

LES ONDES SUCCESSIVES,

PAR M. P.-H. BLANCHET,
Professeur de Physique au Collége royal de Henri IV.

1. Pendant longtemps dans la théorie mathématique de la propagation des ondes par les milieux élastiques, les géomètres n'ont considéré, en général, que les ondes dues à un ébranlement central instantané Je me propose ici de rechercher les lois de la propagation des ondes successives produites par une cause centrale incessamment agissante. M. Duhamel a donné une méthode générale pour passer du cas de déplacements déterminés et fixes au cas de déplacements fonctions du temps [*]. Mais il n'en a pas déduit les lois générales de propagation, qui font l'objet de ce Mémoire; et d'ailleurs j'ai employé une méthode différente.

Pour parvenir à la solution de la question, je suppose que les points du milieu, soumis à leurs actions moléculaires mutuelles, sont sollicités en outre par une force accélératrice. Les équations du problème sont celles de mon premier Mémoire [**], augmentées chacune d'un terme fonction des coordonnées et du temps. M. Cauchy a donné les intégrales des équations de ce genre sous forme d'intégrales définies multiples [***]. Je parviens à réduire ces intégrales par une méthode

[*] Voyez le XXIII^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, page 1.

[**] Voyez *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, tome V, page 1.

[***] Voyez *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, par M. A. Cauchy, page 89.

analogue à celle que j'ai donnée précédemment. C'est l'interprétation des intégrales réduites qui me donne les lois de cet autre mouvement.

2. Dans un milieu élastique, homogène, indéfini, cristallisé d'une manière quelconque, les équations générales du mouvement d'une molécule peuvent être présentées symboliquement sous la forme abrégée suivante :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\mathcal{L}_1 - s^2)\xi + \mathcal{R}_2\eta + \mathcal{Q}_3\zeta = f_1(x, y, z, t), \\ &\mathcal{R}_1\xi + (\mathcal{M}_2 - s^2)\eta + \mathcal{P}_3\zeta = f_2(x, y, z, t), \\ &\mathcal{Q}_1\xi + \mathcal{P}_2\eta + (\mathcal{N}_3 - s^2)\zeta = f_3(x, y, z, t); \end{aligned} \right.$$

$f_1(x, y, z, t)$, $f_2(x, y, z, t)$, $f_3(x, y, z, t)$ sont les composantes de la force accélératrice parallèlement aux axes des cordonnées. $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{Q}_3$, $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, sont des polynômes homogènes du second degré par rapport à trois quantités u, v, w. Les exposants de ces quantités et de s correspondent respectivement à des différentiations effectuées par rapport à x, y, z, t sur les inconnues ξ, η, ζ, fonctions de ces quatre dernières variables.

D'après les formules données par M. Cauchy, dans les deuxième et troisième livraisons de ses *Nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique mathématique,* on aura les intégrales générales des équations (1) en prenant

$$(2)\begin{cases}
\xi = \dfrac{-1}{8\pi^3}\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st]\sqrt{-1}}}{(\mathrm{S})_s}\left\{\begin{array}{r} s\,[\mathrm{L}_1 f_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{R}_1 f_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{Q}_1 f_3(\lambda,\mu,\nu)]\\ -\sqrt{-1}\,[\mathrm{L}_1 \mathrm{f}_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{R}_1 \mathrm{f}_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{Q}_1 \mathrm{f}_3(\lambda,\mu,\nu)]\\ -\sqrt{-1}\displaystyle\int_0^t e^{-s\tau\sqrt{-1}}\,[\mathrm{L}_1 f_1(\lambda,\mu,\nu,\tau)+\mathrm{R}_1 f_2(\lambda,\mu,\nu,\tau)+\mathrm{Q}_1 f_3(\lambda,\mu,\nu,\tau)]\,d\tau \end{array}\right\} du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,\\[2ex]
\eta = \dfrac{-1}{8\pi^3}\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st]\sqrt{-1}}}{(\mathrm{S})_s}\left\{\begin{array}{r} s\,[\mathrm{R}_2 f_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{M}_2 f_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{P}_2 f_3(\lambda,\mu,\nu)]\\ -\sqrt{-1}\,[\mathrm{R}_2 \mathrm{f}_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{M}_2 \mathrm{f}_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{P}_2 \mathrm{f}_3(\lambda,\mu,\nu)]\\ -\sqrt{-1}\displaystyle\int_0^t e^{-s\tau\sqrt{-1}}\,[\mathrm{R}_2 f_1(\lambda,\mu,\nu,\tau)+\mathrm{M}_2 f_2(\lambda,\mu,\nu,\tau)+\mathrm{P}_2 f_3(\lambda,\mu,\nu,\tau)]\,d\tau \end{array}\right\} du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,\\[2ex]
\zeta = \dfrac{-1}{8\pi^3}\displaystyle\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+st]\sqrt{-1}}}{(\mathrm{S})_s}\left\{\begin{array}{r} s\,[\mathrm{Q}_3 f_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{P}_3 f_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{N}_3 f_3(\lambda,\mu,\nu)]\\ -\sqrt{-1}\,[\mathrm{Q}_3 \mathrm{f}_1(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{P}_3 \mathrm{f}_2(\lambda,\mu,\nu)+\mathrm{N}_3 \mathrm{f}_3(\lambda,\mu,\nu)]\\ -\sqrt{-1}\displaystyle\int_0^t e^{-s\tau\sqrt{-1}}\,[\mathrm{Q}_3 f_1(\lambda,\mu,\nu,\tau)+\mathrm{P}_3 f_2(\lambda,\mu,\nu,\tau)+\mathrm{N}_3 f_3(\lambda,\mu,\nu,\tau)]\,d\tau \end{array}\right\} du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu;
\end{cases}$$

$$(3)\qquad \mathrm{S} = (\mathfrak{L}_1 - s^2)(\mathfrak{M}_2 - s^2)(\mathfrak{N}_3 - s^2) - \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3(\mathfrak{L}_1 - s^2) - \mathfrak{Q}_3\mathfrak{Q}_1(\mathfrak{M}_2 - s^2) - \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2(\mathfrak{N}_3 - s^2) + \mathfrak{R}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_3\mathfrak{R}_1;$$

$$(4)\quad \begin{cases}
\mathrm{L}_1 = (\mathfrak{M}_2 - s^2)(\mathfrak{N}_3 - s^2) - \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3, & \mathrm{R}_1 = -\mathfrak{R}_2(\mathfrak{N}_3 - s^2) + \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_3, & \mathrm{Q}_1 = -\mathfrak{Q}_3(\mathfrak{M}_2 - s^2) + \mathfrak{R}_2\mathfrak{P}_3,\\
\mathrm{R}_2 = -\mathfrak{R}_1(\mathfrak{N}_3 - s^2) + \mathfrak{P}_3\mathfrak{Q}_1, & \mathrm{M}_2 = (\mathfrak{N}_3 - s^2)(\mathfrak{L}_1 - s^2) - \mathfrak{Q}_3\mathfrak{Q}_1, & \mathrm{P}_2 = -\mathfrak{P}_3(\mathfrak{L}_1 - s^2) + \mathfrak{Q}_3\mathfrak{R}_1,\\
\mathrm{Q}_3 = -\mathfrak{Q}_1(\mathfrak{M}_2 - s^2) + \mathfrak{R}_1\mathfrak{P}_2, & \mathrm{P}_3 = -\mathfrak{P}_2(\mathfrak{L}_1 - s^2) + \mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}_2, & \mathrm{N}_3 = (\mathfrak{L}_1 - s^2)(\mathfrak{M}_2 - s^2) - \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2.
\end{cases}$$

3. Ces valeurs de ξ, η, ζ satisfont aux équations (1). En effet, si on les substitue, les parties indépendantes de l'intégration relative à τ se détruisent dans les premiers membres des équations; on le verra comme dans le troisième Mémoire. Les parties dépendantes de cette intégration jouissent de la même propriété, abstraction faite de la variabilité de la limite supérieure de l'intégrale $\int_0^t$, quand on différentie par rapport à t. Mais si l'on a égard à cette variabilité, les valeurs de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ reproduisent les seconds membres. Dans la valeur de $\frac{d\xi}{dt}$, par exemple, on trouvera

$$\frac{-1}{8\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int\int_0^t \mathcal{E}\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)+s(t-\tau)]\sqrt{-1}}}{(S)_s}s\begin{bmatrix} L_1 f_1(\lambda,\mu,\nu,\tau) \\ +R_1 f_2(\lambda,\mu,\nu,\tau) \\ +Q_1 f_3(\lambda,\mu,\nu,\tau)\end{bmatrix} d\tau\, du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

$$+\frac{\sqrt{-1}}{8\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int \mathcal{E}\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}}{(S)_s}\begin{bmatrix} L_1 f_1(\lambda,\mu,\nu,t) \\ +R_1 f_2(\lambda,\mu,\nu,t) \\ +Q_1 f_3(\lambda,\mu,\nu,t)\end{bmatrix} d\tau\, du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Si l'on passe à la valeur de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, la seconde de ces intégrales ne changera pas d'aspect. f_1, f_2, f_3 seront remplacés par $\frac{df_1}{dt}$, $\frac{df_2}{dt}$, $\frac{df_3}{dt}$, et comme on a

$$\mathcal{E}\frac{L_1}{(S)_s} = 0,\quad \mathcal{E}\frac{R_1}{(S)_s} = 0,\quad \mathcal{E}\frac{Q_1}{(S)_s} = 0,$$

elle s'évanouira d'elle-même. La première donnera deux termes: l'un, dépendant de $\int_0^t$, contribuera à l'évanouissement du premier membre de la première des équations (1); l'autre sera

$$\frac{-1}{8\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int \mathcal{E}\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}}{(S)_s}s\begin{bmatrix} L_1 f_1(\lambda,\mu,\nu,t) \\ +R_1 f_2(\lambda,\mu,\nu,t) \\ +Q_1 f_3(\lambda,\mu,\nu,t)\end{bmatrix} du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu;$$

et comme on a

$$\mathcal{E}\frac{-sL_1}{(S)_s} = 1,\quad \mathcal{E}\frac{-sR_1}{(S)_s} = 0,\quad \mathcal{E}\frac{-sQ_1}{(S)_s} = 0,$$

il se réduira à l'intégrale sextuple

$$\frac{1}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)]\sqrt{-1}}\, f_1(\lambda, \mu, \nu, t)\, du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu,$$

qui, d'après la formule de Fourier étendue à trois variables, représente $f_1(x, y, z, t)$, c'est-à-dire le deuxième membre de la première des équations (1). Cette équation sera donc satisfaite. Il en sera de même des deux autres.

4. Pour $t = 0$, les parties dépendantes de $\int_0^t$ disparaissent, et, comme dans le troisième Mémoire [*], les valeurs de ξ, η, ζ se réduisent à $\mathfrak{f}_1(x, y, z)$, $\mathfrak{f}_2(x, y, z)$, $\mathfrak{f}_3(x, y, z)$, c'est-à-dire aux valeurs initiales : dans les expressions de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, les parties dépendantes de $\int_0^t$ s'évanouissent aussi, et l'on retrouve les valeurs initiales $\mathrm{f}_1(x, y, z)$, $\mathrm{f}_2(x, y, z)$, $\mathrm{f}_3(x, y, z)$.

5. Je ne m'arrêterai pas à la réduction des parties des intégrales (2) indépendantes de $\int_0^t$. Elle a été faite ailleurs et conduirait à des conséquences générales que j'ai déjà fait connaître [**].

6. Les parties dépendantes de l'intégration par rapport à τ peuvent être mises sous la forme

$$(5)\quad \frac{-\sqrt{-1}}{8\pi^3}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)-s(t-\tau)]\sqrt{-1}}}{(\mathrm{S})_s}\,\omega f(\lambda, \mu, \nu, \tau)\, d\tau\, du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu;$$

ω est une fonction homogène entière du quatrième degré.

En transformant sous le signe $\mathcal{E}$, comme au n° 4 du troisième Mé-

[*] Voyez *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome VII, page 13.

[**] *Idem*, tomes V et VII.

moire [*], on aura d'abord

$$(6)\quad \frac{-\sqrt{-1}}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{t}\mathcal{E}\,\frac{e^{[\rho u-s(t-\tau)]\sqrt{-1}}\,.\,\omega}{(\mathrm{S})_s}\,\chi(\rho,\tau)\,d\tau\,du\,dv\,dw\,\rho^2\,d\rho\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

$$(7)\qquad \chi(\rho,\tau)=f(x-\alpha\rho,\ y-6\rho,\ z-\gamma\rho,\ \tau),$$

puis ensuite

$$(8)\quad \frac{-\sqrt{-1}}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{t}\mathcal{E}\,\frac{e^{u[\rho-n(t-\tau)]\sqrt{-1}}\,.\,m}{(\mathrm{T})_n}\,\chi(\rho,\tau)\,u\rho^2\,d\tau\,du\,dp\,dq\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

en ayant égard au changement de variable sous le signe $\mathcal{E}$.

Cette intégrale peut être remplacée par

$$(9)\quad \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{t}\frac{d.}{dt}\,\mathcal{E}\,\frac{e^{u[\rho-n(t-\tau)]\sqrt{-1}}\,.\,m}{(\mathrm{T})_n}\,\chi(\rho,\tau)\,\frac{\rho^2}{n}\,d\tau\,du\,dp\,dq\,d\rho\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

On peut faire les intégrations relatives à u et ρ par la formule de Fourier, et l'on trouve

$$(10)\quad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{t}\frac{d.}{dt}\,\mathcal{E}\,\frac{2nm}{(\mathrm{T})_n}\,\chi[n(t-\tau),\tau]\,(t-\tau)^2\,d\tau\,dp\,dq\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

A cause des limites o et $+\infty$ de ρ, le résidu intégral sera borné aux valeurs positives de n.

En reprenant maintenant

$$v=p(t-\tau),\quad w=q(t-\tau),\quad s=n(t-\tau),$$

on trouvera

$$(11)\quad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{t}\frac{d.}{dt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\,\frac{2s\omega}{(\mathrm{S})_s}\,\chi(s,\tau)\,dv\,dw\,\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta\,d\tau,$$

résultat analogue à la formule (14) du Mémoire cité. On ne devra prendre dans les résidus que les valeurs positives de s tirées de l'équation $\mathrm{S}=0$.

Remarquons que S est devenu une fonction homogène du sixième

---

[*] Voyez *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome V, page 15.

degré de v, w, $t-\tau$; ω est une fonction homogène du quatrième degré des mêmes quantités [*].

7. Cela posé, l'une quelconque s des racines positives de l'équation $S = 0$ donnera parmi les résidus partiels un terme de la forme

$$(12)\qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^t \frac{d.}{dt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2s\omega}{S'_s}\,\chi(s,\tau)\,dv\,dw\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta\,d\tau.$$

On peut appliquer à cette intégrale les raisonnements qui ont servi à transformer l'intégrale (57) du premier Mémoire. On posera

$$(13)\qquad \varphi(t-\tau,s) = \int \frac{-2s\omega}{S'}\,\delta\,\frac{d\sigma}{ds},$$

en attribuant le même sens aux notations. Rien n'empêchera d'arriver à la formule

$$(14)\qquad \frac{-1}{8\pi^2}\int_0^t \frac{d.}{dt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{N(t-\tau)}^{\infty} \varphi(t-\tau,s)\,\chi(s,\tau)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta\,d\tau.$$

8. Dans les composantes $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ de la vitesse, on aura des intégrales de la forme

$$(15)\qquad \frac{d.}{dt}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^t \frac{d.}{dt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{N(t-\tau)}^{\infty} \varphi(t-\tau,s)\,\chi(s,\tau)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta\,d\tau;$$

pour effectuer cette différentiation de l'expression (14) par rapport à t, il faut d'abord différentier sous le signe $\int_0^t$, ce qui donne

$$(16)\qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^t \frac{d^2.}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{N(t-\tau)}^{\infty} \varphi(t-\tau,s)\,\chi(s,\tau)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta\,d\tau;$$

puis il faut avoir égard à la variabilité de la limite t. Pour le faire commodément, je poserai

$$s = n(t-\tau),$$

l'intégrale (14) devient

$$(17)\qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^t \frac{d.}{dt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_N^{\infty} (t-\tau)^2\,\varphi(1,n)\,\chi[n(t-\tau),\tau]\,dn\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta\,d\tau.$$

---

[*] Cette transformation suppose au fond $t > 0$. Il nous est inutile d'attribuer à t des valeurs négatives : l'interprétation des résultats du calcul n'en serait pas d'ailleurs plus difficile.

L'expression qui se trouve sous le signe $\int_0^t$ s'évanouit pour $\tau = t$ à cause du facteur $t - \tau$, que la différentiation $\frac{d.}{dt}$ ne saurait faire disparaître, parce qu'il entre au carré. Ainsi la variabilité de la limite t n'ajoute rien à l'intégrale (16) déjà écrite.

9. Si l'on effectue les différentiations indiquées, et si l'on pose

$$\frac{d.\varphi(t-\tau, s)}{dt} = \varphi'(t-\tau, s), \quad \frac{d^2.\varphi(t-\tau, s)}{dt^2} = \varphi''(t-\tau, s),$$

on trouvera

$$(18)\quad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{t}\left\{\mathrm{N}(t-\tau)\varphi(1,\mathrm{N})\chi[\mathrm{N}(t-\tau),\tau] - \int_{\mathrm{N}(t-\tau)}^{\infty}\varphi'(t-\tau,s)\chi(s,\tau)ds\right\}d\tau\sin\varpi\, d\varpi\, d\vartheta,$$

au lieu de l'intégrale (14), et

$$(19)\quad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{t}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{N}(t-\tau)\varphi(1,\mathrm{N})\frac{d.}{dt}\chi[\mathrm{N}(t-\tau),\tau] + \mathrm{N}\varphi(1,\mathrm{N})\chi[\mathrm{N}(t-\tau),\tau] \\ +\mathrm{N}\varphi'(1,\mathrm{N})\chi[\mathrm{N}(t-\tau),\tau] - \int_{\mathrm{N}(t-\tau)}^{\infty}\varphi''(t-\tau,s)\chi(s,\tau)ds\end{array}\right\}d\tau\sin\varpi\, d\varpi\, d\vartheta,$$

au lieu de l'intégrale (16) [*].

10. Concevons maintenant, comme dans le premier Mémoire, que l'ébranlement initial ait été circonscrit dans une certaine portion de l'espace autour de l'origine des coordonnées. Concevons, en outre, que l'action de la force accélératrice elle-même soit insensible aussi au delà d'une certaine distance de cette origine. Alors, non-seulement les fonctions $\mathfrak{f}_1(x, y, z)$, $\mathfrak{f}_2(x, y, z)$, $\mathfrak{f}_3(x, y, z)$, $\mathrm{f}_1(x, y, z)$, $\mathrm{f}_2(x, y, z)$, $\mathrm{f}_3(x, y, z)$ s'évanouissent pour des valeurs suffisamment grandes du rayon vecteur

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

mais encore il en sera de même des fonctions $f_1(x, y, z, t)$, $f_2(x, y, z, t)$, $f_3(x, y, z, t)$ quel que soit t.

Nous ne discuterons pas les termes dépendants des six premières

[*] On peut faire aussi le calcul en différentiant l'intégrale (18), mais c'est plus long.

fonctions; nous avons fait cette discussion dans des Mémoires précédents.

Nous allons nous attacher aux termes dépendants des trois dernières, qui représentent les composantes de la force accélératrice.

Pour rechercher les points en mouvement après le temps t, il faudra considérer les expressions de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$. Ces expressions contiendront des termes de la forme (19).

D'après l'équation (7), on a

$$\chi(\rho, \tau) = f(x - \alpha\rho, y - 6\rho, z - \gamma\rho, \tau).$$

La fonction f désigne l'une quelconque des fonctions f_1, f_2, f_3. Elle n'a de valeur sensible que si le rayon vecteur ρ, qui représente

$$\sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2},$$

prend des valeurs qui se rapportent aux points compris dans la portion de l'espace où s'exerce l'action de la force accélératrice.

Pour des points très-éloignés de l'origine des coordonnées, ρ sera très-grand en même temps que r. Par conséquent, la fonction

$$\chi[N(t-\tau), \tau],$$

qui entre dans l'expression (19), n'aura de valeur sensible qu'autant que $N(t-\tau)$ sera très-grand. Mais alors la partie la plus considérable de l'expression (19) sera

$$(20)\quad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{t} N(t-\tau)\,\varphi(1, N)\frac{d.}{dt}\chi[N(t-\tau), \tau]\,d\tau \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,$$

car elle renferme le facteur $N(t-\tau)$ qui est du même ordre de grandeur que r. A la vérité, le dernier terme de l'expression (19),

$$(21)\qquad \frac{-1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{t}\int_{N(t-\tau)}^{\infty} \varphi''(t-\tau, s)\,\chi(s, \tau)\,ds\, d\tau \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,$$

peut ne pas s'évanouir sans que la limite inférieure $N(t-\tau)$ de s soit très-grande. Il suffit que la variable s soit comprise entre deux limites ρ_1 et ρ_2 supérieures à $N(t-\tau)$ et comparables à r. Mais, si la fonction homogène $\varphi''(t-\tau, s)$, du degré -1, ne tend pas vers l'infini en même temps que le rapport $\frac{s}{t-\tau}$, l'intégrale (21) sera très-petite en comparaison de la grandeur que prend l'intégrale (20), quand le facteur $\mathrm{N}(t-\tau)$ devient comparable à r. Nous négligerons donc aussi l'intégrale (21) comme insensible. Il s'agira donc seulement de discuter l'intégrale (20).

11. On pourra raisonner comme à la page 18 du premier Mémoire, en ne considérant d'abord que les intégrations relatives à ϖ et à θ. $\mathrm{N}(t-\tau)$ devra coïncider avec l'une des valeurs de

$$\rho = \sqrt{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 + (z-\nu)^2},$$

pour que la fonction χ, et par suite l'intégrale ne s'évanouisse pas. Si la surface dont le centre est au point (x, y, z), et dont l'équation polaire est

$$\rho = \mathrm{N}(t-\tau), \tag{22}$$

ne rencontre pas la portion de l'espace où s'exerce l'action de la force accélératrice, l'intégrale sera nulle. Il faudra donc dans les éléments de l'intégration par rapport à τ, de o à t, choisir les valeurs de τ de manière à remplir cette condition. Il s'ensuit que l'intégration relative à τ sera restreinte, pour chaque valeur de t, entre des limites dont la différence sera comparable aux dimensions de la partie de l'espace soumise à l'action de la force accélératrice. On pourrait déjà tirer les lois cherchées des considérations précédentes. Mais il vaut peut-être mieux donner à l'intégrale (22) une forme plus expressive.

12. De l'équation (22), on tire

$$\tau = t - \frac{1}{\mathrm{N}}\rho, \quad \mathrm{N}\,d\tau = -\,d\rho.$$

Pour les limites o et t de τ, on aura les limites $\mathrm{N}t$ et o de ρ, ou o et $\mathrm{N}t$ en changeant le signe de l'intégrale; on pourra même prendre o et ∞, quand $\mathrm{N}t$ sera assez grand pour que celle des surfaces (22) qui répond à $\tau = 0$ embrasse la partie de l'espace agitée par la force accélératrice. Dans le cas contraire, il suffira d'avoir égard à la restriction

$$(23) \qquad \rho < \mathrm{N}t.$$

On aura ainsi, en général,

$$(24) \qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\mathrm{N}}\varphi(1,\mathrm{N})\frac{d.}{dt}\chi\left(\rho,\, t-\frac{\rho}{\mathrm{N}}\right)\rho\, d\rho \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta.$$

On pourra même revenir aux λ, μ, ν, en renversant les formules

$$x-\lambda=\alpha\rho,\quad y-\mu=6\rho,\quad z-\nu=\gamma\rho,$$

qui ont servi aux transformations précédentes; l'intégrale (24) deviendra

$$(25) \quad \frac{1}{8\pi^2}\int\int\int\frac{1}{\mathrm{N}}\varphi(1,\mathrm{N})\frac{d.}{dt}f\left[\lambda,\mu,\nu,\, t-\frac{\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2}}{\mathrm{N}}\right]\frac{d\lambda\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2}}.$$

Les limites des intégrations seront $-\infty$ et $+\infty$, ou plutôt les limites de la portion de l'espace où se fait sentir l'action de la force accélératrice; à moins que t ne soit pas encore assez grand et qu'il ne faille avoir égard à la restriction (23), qui revient à

$$(26) \qquad \sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2} < \mathrm{N}t.$$

13. Si l'on observe que les λ, μ, ν, sont très-petits par rapport à $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, on aura approximativement

$$(27) \qquad \rho=\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2}=r-\frac{\lambda x+\mu y+\nu z}{r}.$$

De plus N, qui était fonction de ϖ et θ, est maintenant fonction de $\frac{x-\lambda}{\rho}$, $\frac{y-\mu}{\rho}$, $\frac{z-\nu}{\rho}$, dont les valeurs approchées sont :

$$(28) \qquad \begin{cases} \dfrac{x-\lambda}{\rho}=\dfrac{x}{r}+\dfrac{x}{r}\,\dfrac{\lambda x+\mu y+\nu z}{r^2}-\dfrac{\lambda}{r}, \\ \dfrac{y-\mu}{\rho}=\dfrac{y}{r}+\dfrac{y}{r}\,\dfrac{\lambda x+\mu y+\nu z}{r^2}-\dfrac{\mu}{r}, \\ \dfrac{z-\nu}{\rho}=\dfrac{z}{r}+\dfrac{z}{r}\,\dfrac{\lambda x+\mu y+\nu z}{r^2}-\dfrac{\nu}{r}. \end{cases}$$

On peut réduire N à une quantité N_0, fonction de $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, toutes les fois que N n'est pas multiplié par r ou par t. Dans ces derniers cas, il faudrait prendre, dans la valeur de N, les termes proportionnels à $\frac{\lambda}{r}$, $\frac{\mu}{r}$, $\frac{\nu}{r}$. La même remarque s'applique à une fonction quelconque de N.

En désignant par A, B, C les dérivées partielles de N_0 par rapport aux quantités $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, regardées comme trois variables indépendantes, on peut écrire

$$(29)\quad N = N_0 + \frac{(Ax+By+Cz)(\lambda x+\mu y+\nu z)}{r^3} - \frac{A\lambda+B\mu+C\nu}{r},$$

et

$$(30)\quad \frac{\rho}{N} = \frac{r}{N_0} + \frac{(A\lambda+B\mu+C\nu)}{N_0} - \frac{(Ax+By+Cz)(\lambda x+\mu y+\nu z)}{N_0^2 r^2} - \frac{\lambda x+\mu y+\nu z}{N_0 r}.$$

Pour simplifier cette dernière expression, il faut faire entrer en considération les propriétés des A, B, C. Or, si l'on met au lieu de $t-\tau$ une valeur H convenablement choisie, l'une des surfaces comprises dans la formule (22) passera par l'origine. Les λ, μ, ν seront nuls pour ce point, et l'on aura

$$(31)\qquad r = N_0 H$$

pour l'équation de la surface en question. N_0 pourra encore être regardé comme fonction de $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$. La normale au point (x, y, z) fera avec les axes coordonnés des angles dont les cosinus seront respectivement proportionnels aux trois expressions

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} A\left(\frac{x^2}{r^2}-1\right)+B\frac{xy}{r^2}+C\frac{xz}{r^2}+\frac{x}{H}, \\ A\frac{xy}{r^2}+B\left(\frac{y^2}{r^2}-1\right)+C\frac{yz}{r^2}+\frac{y}{H}, \\ A\frac{xz}{r^2}+B\frac{yz}{r^2}+C\left(\frac{z^2}{r^2}-1\right)+\frac{z}{H}. \end{array}\right.$$

Multiplions les trois expressions (32) par λ, μ, ν, ajoutons-les, désignons par G la racine carrée de la somme de leurs carrés; nous aurons pour résultat le produit de G par la projection λ' du rayon vecteur, qui va de l'origine au point (λ, μ, ν), sur la normale au point (x, y, z) de la surface (31). Nous trouverons ainsi, en mettant pour H sa valeur $\frac{r}{N_0}$,

$$-(A\lambda + B\mu + C\nu) + \frac{(Ax + By + Cz)(\lambda x + \mu y + \nu z)}{r^2} + \frac{N_0(\lambda x + \mu y + \nu z)}{r} = G\lambda'.$$

L'équation (30) deviendra

$$(33) \qquad \frac{\rho}{N} = \frac{r}{N_0} - \frac{G}{N_0^2}\lambda'.$$

D'un autre côté, si l'on multiplie les trois expressions (32) par $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$, si l'on ajoute les produits et si l'on a soin de diviser par G, on aura le cosinus de l'angle υ de la normale avec le rayon vecteur r. Ce calcul, peu difficile à cause de la symétrie des expressions, donne, toutes réductions faites,

$$(34) \qquad \frac{N_0}{G} = \cos \upsilon;$$

donc

$$(35) \qquad \frac{\rho}{N} = \frac{r}{N_0} - \frac{\lambda'}{N_0 \cos \upsilon}:$$

à l'aide de ces remarques, on pourra remplacer approximativement l'intégrale (25) par

$$(36) \quad \frac{d.}{dt}\frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{N_0 r}\varphi(1, N_0)\int\int\int f\left(\lambda, \mu, \nu, t - \frac{r}{N_0} + \frac{\lambda'}{N_0 \cos \upsilon}\right) d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Si l'on transforme les coordonnées λ, μ, ν en d'autres coordonnées rectangulaires λ', μ', ν', en prenant l'axe des λ' dans la direction de la normale que nous avons considérée tout à l'heure, on trouvera, au lieu de l'intégrale précédente, une intégrale de la forme

$$(37) \quad \frac{d.}{dt}\frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{N_0 r}\varphi(1, N_0)\int\int\int f\left(\lambda', \mu', \nu', t - \frac{r}{N_0} + \frac{\lambda'}{N_0 \cos \upsilon}\right) d\lambda'\, d\mu'\, d\nu'.$$

On a laissé le même f, pour ne pas trop multiplier les notations.

Les limites sont toujours sensiblement celles de la portion de l'espace soumise à l'action de la force accélératrice, sauf la condition restrictive

$$\frac{r}{N_0} - \frac{\lambda'}{N_0 \cos \upsilon} < t, \tag{38}$$

qui remplace la condition (26). Elle ne porte plus que sur λ'.

14. On peut arriver plus rapidement au même résultat par des considérations géométriques. En effet, parmi toutes les surfaces semblables comprises dans l'équation (22) et qui ont toutes pour centre commun le point (x, y, z), il y en a toujours une qui passe par le point (λ, μ, ν). Celle-là coupe le rayon vecteur r en un certain point situé à une distance r_1 du point (x, y, z) et à une distance $r - r_1$ de l'origine primitive des coordonnées. Si l'on conçoit en ce point d'intersection le plan tangent et la normale, le point (λ, μ, ν) sera à une distance du plan tangent infiniment petite du second ordre. La projection λ'' du rayon vecteur $r - r_1$ sur un axe parallèle à la normale différera aussi d'un infiniment petit du second ordre de la projection λ' du rayon vecteur qui va de l'origine au point (λ, μ, ν). En désignant par υ l'angle du rayon r avec la normale, on aura donc, aux infiniment petits du second ordre près,

$$\lambda' = (r - r_1) \cos \upsilon;$$

d'où l'on tire, en divisant par N_0,

$$\frac{r}{N_0} - \frac{r_1}{N_0} = \frac{\lambda'}{N_0 \cos \upsilon}.$$

N prend la valeur N_0 pour tout point pris sur le rayon vecteur r, par conséquent pour le point situé à la distance r_1 du point x, y, z. Donc, puisque les rayons vecteurs ρ et r_1 se rapportent à des points d'une même surface comprise dans la formule (22), on a

$$\frac{\rho}{N} = \frac{r_1}{N_0},$$

et, par suite,

$$\frac{\rho}{N} = \frac{r}{N_0} - \frac{\lambda'}{N_0 \cos \upsilon},$$

ce qu'il fallait prouver. υ est constant comme N_0, tant que le point (x, y, z) ne change pas, à cause de la similitude des surfaces (22) : υ est aussi une fonction de $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$. On achèverait la transformation comme précédemment, et l'on trouverait l'intégrale (37).

15. On peut concevoir que l'on ait effectué les intégrations relatives à μ' et ν', et l'on aura seulement à considérer une expression de la forme

$$(39)\qquad \frac{d.}{dt}\frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{N_0 r}\varphi(1, N_0)\int F\left(\lambda', t - \frac{r}{N_0} + \frac{\lambda'}{N_0 \cos\upsilon}\right) d\lambda',$$

toujours sous la restriction (38), ou

$$(40)\qquad t - \frac{r}{N_0} > - \frac{\lambda'}{N_0 \cos\upsilon}.$$

Soient $-\varepsilon'$ et $+\varepsilon$ les limites de la partie de l'espace qu'agite la force accélératrice, estimées parallèlement à l'axe des λ'. Si l'on a

$$(41)\qquad t - \frac{r}{N_0} > \frac{\varepsilon'}{N_0 \cos\upsilon},$$

les limites de l'intégration relative à λ' pourront être $-\varepsilon'$ et $+\varepsilon$, ou même $-\infty$ et $+\infty$. La condition (40) sera toujours remplie.

Si l'on a

$$(42)\qquad -\frac{\varepsilon}{N_0 \cos\upsilon} < t - \frac{r}{N_0} < \frac{\varepsilon'}{N_0 \cos\upsilon},$$

la condition (40) sera remplie seulement pour les valeurs de λ' comprises entre $-\varepsilon$ et $\left(t - \frac{r}{N_0}\right) N_0 \cos\upsilon$.

Enfin, si l'on a

$$(43)\qquad t - \frac{r}{N_0} < \frac{-\varepsilon}{N_0 \cos\upsilon},$$

la condition (40) ne sera jamais remplie pour des valeurs de λ' comprises entre $-\varepsilon'$ et $+\varepsilon$. L'intégrale (39) s'évanouira.

Dans le premier cas, en faisant l'intégration relative à λ', on aura une expression de la forme

$$(44)\qquad \frac{d.}{dt}\frac{1}{N_0 r}\varphi(1, N)\mathcal{F}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}, t - \frac{r}{N_0}\right) [*].$$

Il en sera de même dans le second cas. Dans le troisième, on aura o. La fonction $\mathcal{F}$ devra s'évanouir.

En résumé, l'intégrale, mise sous la forme (44), ne s'évanouira pas, en général, tant qu'on aura

$$(45)\qquad -\frac{\varepsilon}{N_0 \cos \upsilon} < t - \frac{r}{N_0};$$

elle s'évanouira dans le cas contraire.

16. Cela posé, considérons, après le temps t, l'état d'un point quelconque (x, y, z) assez éloigné de l'origine des coordonnées pour que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ soit très-grand par rapport à ε, et faisons

$$(46)\qquad \frac{r}{N_0} - \frac{\varepsilon}{N_0 \cos \upsilon} = T.$$

Tant qu'on aura $t < T$, l'expression (44) s'évanouira; le mouvement n'atteindra pas le point (x, y, z). Il en sera de même à la limite $t = T$. Mais pour $t > T$, le mouvement aura commencé pour ne plus cesser. Il suit de là qu'après un temps déterminé T, le mouvement ne sera pas parvenu au delà de la surface représentée par l'équation (46), ou

$$(47)\qquad r = N_0 T + \frac{\varepsilon}{\cos \upsilon}.$$

Après un temps quelconque $t > T$, tous les points compris en deçà de cette surface seront, en général, animés de vitesses diverses.

17. Pour tous les points situés sur un même rayon vecteur, les quantités $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, N_0, υ, ε, ε' ne changeront pas; par conséquent la

[*] Cette formule a un aspect aussi simple que les formules données par M. Poisson, pour la propagation sphérique d'un ébranlement central instantané. *Voyez* le tome X des *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut*, page 598.

fonction $\mathcal{F}$ gardera la même valeur si la quantité $t - \frac{r}{N_0}$ reste la même. Or, elle restera la même si, pendant que t augmente ou diminue d'une quantité quelconque h, r augmente ou diminue d'une quantité $k = N_0 h$; donc, dans la direction d'un même rayon vecteur, sans le facteur $\frac{1}{r}$ de l'expression (44), le mouvement se propagerait pour ainsi dire tout d'une pièce, comme si tous les points en mouvement glissaient en quelque sorte simultanément dans la direction du rayon. Le mouvement actuel n'est autre chose qu'un mouvement précédent qui aurait glissé de la même manière; pourvu toujours que l'on ne considère que des points situés à une distance suffisamment grande de l'origine des coordonnées, ce qui exige que la différence $r - k$ reste très-grande.

Si l'on a égard au facteur $\frac{1}{r}$, on se fera encore une image de la propagation en concevant que, pendant cette espèce de glissement du mouvement, les vitesses varient en raison inverse de la distance des points à l'origine.

18. Le facteur $\varphi(1, N_0)$ peut se discuter comme au n° **11** du premier Mémoire [*]. On trouvera sans plus de peine [**],

$$(48) \qquad \varphi(1, N_0) = \Omega\psi(1, N_0),$$

et comme ici ω représentera les quantités de la forme L_1. R_2. Q_3, etc., qui entrent dans les valeurs de ξ, η, ζ, Ω représentera des fonctions de $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, qui ne changeront pas tant que le point (x, y, z) sera sur le même rayon vecteur. Si donc on prend les parties de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ qui dépendent d'une des fonctions f, par exemple, de la fonction f_1; si en même temps on a égard seulement à l'une des valeurs s'^2 de s^2; ces parties seront proportionnelles à ce que deviennent les quantités L_1, R_2, Q_3, quand on fait les transformations qui changent ω en Ω, c'est-à-

[*] *Voyez* Journal de M. Liouville, tome V, page 19.

[**] *Idem*, page 20.

dire quand elles sont devenues certaines fonctions de $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, que nous désignerons encore par L_1, R_2, Q_3, pour ne pas multiplier les notations.

Pour la même valeur s'^2 de s^2, les parties qui dépendent de f_2 seront proportionnelles à R_1, M_2, P_3; celles qui dépendent de f_3 seront proportionnelles à Q_1, P_2, N_3. Je dis que les quantités comprises dans ces trois groupes sont proportionnelles entre elles.

En effet, on a identiquement

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathcal{L}_1 - s^2)L_1 + \mathcal{R}_2 R_2 + \mathcal{Q}_3 Q_3 &= 0,\\ \mathcal{R}_1 L_1 + (\mathcal{M}_2 - s^2)R_2 + \mathcal{P}_3 Q_3 &= 0,\\ \mathcal{Q}_1 L_1 + \mathcal{P}_2 R_2 + (\mathcal{N}_3 - s^2)Q_3 &= 0;\end{aligned}\right.$$

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathcal{L}_1 - s^2)R_1 + \mathcal{R}_2 M_2 + \mathcal{Q}_3 P_3 &= 0,\\ \mathcal{R}_1 R_1 + (\mathcal{M}_2 - s^2)M_2 + \mathcal{P}_3 P_3 &= 0,\\ \mathcal{Q}_1 R_1 + \mathcal{P}_2 M_2 + (\mathcal{N}_3 - s^2)P_3 &= 0;\end{aligned}\right.$$

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathcal{L}_1 - s^2)Q_1 + \mathcal{R}_2 P_2 + \mathcal{Q}_3 N_3 &= 0,\\ \mathcal{R}_1 Q_1 + (\mathcal{M}_2 - s^2)P_2 + \mathcal{P}_3 N_3 &= 0,\\ \mathcal{Q}_1 Q_1 + \mathcal{P}_2 P_2 + (\mathcal{N}_3 - s^2)N_3 &= 0.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs le déterminant de chacun de ces trois systèmes d'équations n'est autre chose que le second membre de la formule (3). Il est nul quand on met pour s^2 une des racines s'^2 de l'équation $S = 0$, du troisième degré en s^2. Donc chacun des systèmes, insuffisant pour déterminer les quantités du genre ω, qui y entrent, détermine leurs rapports. Donc les quantités L_1, R_2, Q_3 qui satisfont au premier système d'équations sont proportionnelles aux quantités R_1, M_2, Q_3 qui satisfont au second, et aussi aux quantités Q_1, P_2, N_3 qui satisfont au troisième. Ce qu'il fallait prouver.

Donc, dans les valeurs de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, les parties qui dépendent de s' seront proportionnelles aux quantités de ces trois groupes.

Si les parties dépendantes de s'' et s''' étaient supprimées, en vertu de la discussion précédente, les trois composantes de la vitesse d'un point quelconque (x, y, z) d'un même rayon vecteur indéfini seraient, à une grande distance de l'origine, proportionnelles aux quantités L_1, R_2, Q_3, par exemple, d'un même groupe. La vitesse elle-même se trouverait constamment parallèle à une droite qui ferait avec les axes des coordonnées des angles dont les cosinus seraient proportionnels à ces quantités. Le mouvement serait polarisé sur chaque rayon vecteur. La direction de la vitesse changerait d'un rayon vecteur à un autre, à cause du changement de valeurs des rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$.

19. A l'aide des considérations exposées dans les deux numéros précédents, il est très-aisé de se faire une idée du mouvement qui, après un temps t très-grand, agite tous les points de l'espace à une assez grande distance de l'origine des coordonnées, jusqu'à une autre distance bien plus grande encore qui dépend de la grandeur du temps t.

En effet, si l'on fait abstraction d'abord des termes dépendants de s'' et de s''', et si l'on considère tous les points (x, y, z) situés sur une même surface comprise dans la formule

$$r = N_0 H, \tag{52}$$

pour une valeur très-grande du paramètre H; après un temps $t > H$, ces points seront animés de vitesses diverses, mais parallèles à des directions dépendantes seulement de celles des rayons vecteurs respectifs. A mesure que le temps augmentera, le mouvement se propagera en avant; et, si l'on considère la succession des diverses surfaces comprises dans la formule (52) en y regardant H comme un paramètre variable, le mouvement passera progressivement d'une surface à une autre, de telle sorte que la vitesse restera dans chaque rayon vecteur parallèle à elle-même et variera en raison inverse de la distance à l'origine. Les vitesses des différents points d'une surface seront proportionnelles à celles des points homologues d'une autre. Le mouvement restera pour ainsi dire semblable à lui-même.

Ces surfaces devront être regardées comme les surfaces des ondes; l'état de la portion de l'espace comprise entre deux surfaces très-rapprochées constituera, en quelque sorte, l'onde élémentaire. Mais ici l'épaisseur proprement dite des ondes ne serait pas bien définie. Elle pourrait l'être si la fonction f était périodique par rapport au temps; les épaisseurs se déduiraient facilement de l'étendue des périodes. Nous reviendrons sur ce sujet.

20. Si l'on fait abstraction des termes dépendants de s' et de s''', on arrivera à des conséquences analogues, et l'on aura pour s'' une propagation d'ondes élémentaires polarisées comme les précédentes, mais non pas dans les mêmes directions sur les mêmes rayons vecteurs, parce que les Ω dépendent de s. Il en sera de même pour s'''.

Or, dans ces trois propagations partielles, les composantes des vitesses suivant les axes s'ajoutent pour les mêmes points de l'espace; donc les vitesses elles-mêmes se composent statiquement, et par conséquent la considération de ces trois systèmes d'ondes polarisées suffit pour permettre de construire la vitesse totale en chaque point.

Dans un même rayon vecteur les vitesses partielles sont toujours parallèles à elles-mêmes, mais elles ne restent pas proportionnelles, à cause de la différence des vitesses de propagation qui dépendent des N_0. La vitesse résultante n'est donc pas constamment parallèle à elle-même. Elle n'est pas polarisée dans le sens naturel de cette expression. On s'en fera une idée plus nette par la considération des trois systèmes d'ondes élémentaires, qui, ayant des lois de propagation bien distinctes, peuvent pourtant se composer à chaque instant en chaque point et faire connaître complétement l'état de ce point. C'est une coexistence de petits mouvements [*].

21. Si l'on voulait étudier les déplacements au lieu des vitesses, il faudrait discuter les valeurs de ξ, η, ζ. Elles renferment des termes de la forme de l'expression (18). La partie la plus considérable de cette expression est encore la première intégrale. Il semblerait au premier abord que l'on pourrait conserver quelque inquiétude sur la grandeur

[*] Pour faire usage des considérations générales de M. Duhamel, il eût fallu chercher d'abord les intégrales des équations (1), en supposant les seconds membres de ces équations indépendants de t et fonctions seulement des coordonnées x, y, z. Ces intégrales sont comprises, comme cas particulier, dans les formules que j'ai employées.

relative de la seconde, surtout si l'on faisait la transformation

$$s = n(t - \tau), \quad ds = (t - \tau)\,dn.$$

Mais il suffit d'observer que la fonction $\chi(s, \tau)$ ne peut être sensible que pour des valeurs de s correspondantes à celles de ρ dans la partie de l'espace troublée par la force accélératrice, et de mettre l'intégrale relative à s sous la forme

$$\int_{N(t-\tau)}^{\infty} \varphi'(t - \tau, s)\,\chi(s, \tau)\,ds = \varphi(t - \tau, s_1)\,\chi(s_1, \tau) \int_{N(t-\tau)}^{\infty} ds,$$

dans laquelle s_1 représente une valeur moyenne entre les diverses valeurs de s.

Comme, au lieu des limites en évidence, il faut prendre au fond des limites relatives aux ρ, cette intégrale ne peut être que très-petite en comparaison du premier terme. Il ne pourrait y avoir exception que dans le cas où la fonction φ' tendrait vers l'infini pour de très-grandes valeurs de s. Mais cette circonstance sera elle-même écartée (n° **24**).

La partie la plus considérable de l'expression (18) sera donc

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{t} N(t - \tau)\,\varphi(1, N)\,\chi[N(t - \tau), \tau]\,d\tau \sin\varpi\, d\varpi\, d\theta.$$

On la réduira par les moyens précédents et l'on tombera sur une expression semblable à l'expression (44), sauf la différentiation

$$\frac{d.}{dt}.$$

22. On aura donc pour les déplacements des conséquences tout à fait analogues à celles que l'on a eues pour les vitesses. Le déplacement d'un point quelconque sera la résultante statique de trois déplacements partiels qui se transmettront par des systèmes d'ondes élémentaires distincts, polarisés, et dans lesquels les écarts seront en raison inverse des distances à l'origine. Nous ne nous y arrêterons pas davantage.

23. Les considérations développées dans les deux Mémoires insérés au tome VII du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, pages 13 et suivantes, peuvent évidemment trouver place ici. Il faudra d'abord mettre partout $t - \tau$ au lieu de t, et ensuite intégrer par rapport à τ, depuis o jusqu'à t. Les éléments des diverses parties des intégrales réunies sous le signe $\int_0^t$ donneront une somme rigoureusement nulle pour des valeurs de s supérieures à une certaine limite de la forme

$$\mathrm{N}(t-\tau) < \mathrm{N}t.$$

Il n'en faut pas davantage pour faire concevoir que les points du milieu restent rigoureusement en repos jusqu'à ce que le temps soit devenu assez grand pour y faire arriver la plus avancée des ondes élémentaires dont nous avons étudié les propriétés.

24. Les portions d'intégrales qui subsisteront sous le signe extérieur $\int_0^t$ seront, d'après les formules (2) et (3) du tome VII cité [*], prises entre des limites de la forme

$$\mathrm{N}''(t-\tau), \quad \text{et} \quad \mathrm{N}'(t-\tau).$$

Par conséquent s, comme ρ, sera compris entre les mêmes limites; donc s sera toujours du même ordre de grandeur que les quantités de la forme

$$\mathrm{N}(t-\tau);$$

donc, en général, les fonctions φ, φ', φ'', considérées aux n[os] **10** et **21**, restent finies quand s croît indéfiniment; ce qui écarte toute restriction à cet égard.

25. Au lieu de supposer, dans tout ce qui précède, l'action de la force accélératrice circonscrite dans une certaine portion de l'espace autour de l'origine des coordonnées, on pourrait la supposer circon-

---

[*] *Voyez* page 24.

scrite autour d'un autre point (a, b, c). Il suffirait de remplacer dans tous les calculs approchés λ, μ, ν par $\lambda - a$, $\mu - b$, $\nu - c$, et x, y, z, r par $x - a$, $y - b$, $z - c$, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. L'on trouverait que les trois systèmes d'ondes élémentaires se développeraient autour du point (a, b, c) qui en serait le centre commun.

Les deux propagations autour de l'origine et du point (a, b, c) pourraient avoir lieu simultanément et même avec autant d'autres systèmes que l'on voudrait. On devrait faire en chaque point la composition des petits mouvements qu'y amènerait chaque système considéré seul. Au lieu de l'expression (44) on aurait une somme $\sum$ d'expressions de même genre. Mais il faudrait que les points dont on chercherait le mouvement fussent à une grande distance de toutes les portions de l'espace agitées par les forces accélératrices. On pourrait même sous cette condition étudier le mouvement produit par une infinité de systèmes pareils; dans ce cas, la somme $\sum$ serait remplacée par une intégrale triple dont les limites dépendraient de l'étendue de l'action de la force accélératrice [*].

Si l'on considérait le mouvement partiel dû à l'action de la force accélératrice sur une portion de l'espace circonscrite dans un élément de volume $d.V$ autour d'un point (a, b, c), les intégrations relatives aux (λ, μ, ν) indiquées par la formule (36) se feraient facilement. Après avoir remplacé λ, μ, ν par $\lambda + a$, $\mu + b$, $\nu + c$, et x, y, z par $x - a$, $y - b$, $z - c$, il suffirait de faire sous les signes $\int$ les nouveaux λ, μ, ν et λ' égaux à 0, puis de multiplier par l'élément de volume $d.V$ qui représenterait la somme de tous les éléments $d\lambda d\mu d\nu$ compris dans l'espace élémentaire que l'on considère. Il faudrait enfin intégrer par rapport à l'élément de volume $d.V$ relatif au point (a, b, c); ce qui amènerait une intégrale triple de même généralité que l'intégrale (25). On n'aurait rien gagné, si l'on avait pour but de chercher l'effet de

---

[*] Ces résultats immédiats de la forme des intégrales pouvaient être prévus comme conséquences des lois générales de M. Duhamel.

l'action d'une force accélératrice limitée à une portion de l'espace dont toutes les dimensions fussent de grandeurs comparables entre elles; mais si l'une des dimensions était très-petite, comme, par exemple, dans le cas où la portion de l'espace agitée par la force accélératrice serait comprise entre deux surfaces très-voisines l'une de l'autre, ce genre de considérations pourrait faire connaître le mouvement d'un point quelconque, situé à une distance de la couche agitée, très-grande seulement par rapport à l'épaisseur de cette couche, mais non par rapport à ses autres dimensions.

Cette dernière remarque est importante pour des recherches ultérieures, dont j'espère soumettre bientôt les résultats au jugement de l'Académie.