JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ROBERT LESLIE ELLIS

Sur les intégrales aux différences finies

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 422-434.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__422_0>

SUR LES INTÉGRALES AUX DIFFÉRENCES FINIES;

PAR M. ROBERT LESLIE ELLIS (DE CAMBRIDGE).

On peut évaluer l'intégrale

$$\int dx \int dy \ldots \int dz\, \varphi(x, y, \ldots, z), \tag{1}$$

dans laquelle les variables $x, y, \ldots, z$ doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$\psi(x, y, \ldots, z) < h, \tag{2}$$

en remplaçant dans la formule (1) la fonction φ par une fonction discontinue, qui devient égale à zéro pour toutes les valeurs des variables non comprises dans la formule (2). On peut alors étendre les intégrations depuis zéro jusqu'à l'infini, ce qui simplifie beaucoup les calculs.

Je crois que c'est à M. Lejeune-Dirichlet qu'est due l'idée de cette manière d'évaluer les intégrales multiples; c'est ainsi qu'il a obtenu, il y a quelques années, une généralisation très-remarquable d'un théorème dû à Euler.

La théorie des intégrales définies nous fournit plusieurs moyens d'exprimer les fonctions discontinues; je me suis servi, pour cet objet, du théorème de Fourier. Au moyen de ce théorème, j'ai déterminé, dans un petit Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques* de Cambridge, les valeurs de deux intégrales multiples. La première de ces intégrales revient à la généralisation qu'a donnée M. Liouville du résultat de M. Dirichlet; mais je crois que la seconde est nouvelle.

La facilité avec laquelle j'avais obtenu ces résultats me fit penser qu'on pourrait peut-être appliquer une méthode semblable aux différences finies; les résultats auxquels je suis parvenu par cette considération font le sujet de ce qui va suivre.

En suivant l'analogie qui existe entre les différences finies et les différences infiniment petites, on voit qu'à l'intégration multiple, il faut substituer des sommations par rapport à toutes les variables qui entrent dans la fonction donnée.

Soit $\varphi(x, y)$ cette fonction. Je désigne par $\sum_a^b \sum_c^d \varphi(x, y)$ la quantité suivante ($b - a$ et $d - c$ étant des nombres entiers et positifs),

$$\begin{array}{l} \varphi(a, c) + \varphi(a + 1, c) + \ldots \varphi(b, c) \\ + \varphi(a, c + 1) + \ldots\ldots\ldots \varphi(b, c + 1) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \varphi(a, d) + \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi(b, d). \end{array}$$

Il est visible que cette notation pourrait s'étendre à un nombre quelconque de variables.

Le théorème de Fourier se remplacera par la formule suivante, dans laquelle $b - x$ et $x - a$ sont des nombres entiers et positifs,

$$fx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sum_a^b fu \cos \alpha (x - u). \tag{3}$$

On peut donc poser

$$x = a, \ = a + 1, \ldots \ = b;$$

mais si l'on donne à x (qui doit toujours être un nombre entier) une valeur quelconque non comprise dans ces limites, on aura

$$\int_0^\pi d\alpha \sum_a^b fu \cos \alpha (x - u) = 0.$$

La démonstration de ce théorème est si facile, qu'il n'est pas nécessaire de s'y arrêter; je ferai seulement observer en passant qu'elle suppose que la fonction fu ne devienne infinie pour aucune des valeurs

$$u = a, \quad a + 1, \ldots, \quad b.$$

Désignons par $\{x\}^p$ la fonction $\frac{\Gamma(x+p)}{\Gamma(x)}$: toutes les fois que p est un nombre entier et positif, nous aurons

$$\{x\}^p = x . x + 1 \ldots x + p - 1.$$

Cela posé, entrons en matière.

Je vais chercher la valeur de la somme multiple

$$(4)\qquad \sum_0 \sum_0 \cdots \sum_0 \{x\}^{p-1}\{y\}^{q-1}\ldots\{z\}^{r-1} f(x+y+\ldots+z),$$

dans laquelle l'étendue de la sommation est donnée par l'inégalité

$$(5)\qquad x+y+\ldots+z \overset{=}{<} h.$$

D'après l'idée fondamentale de notre analyse, je remplace dans la formule (4) la fonction $f(x+y+\ldots+z)$ par

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\alpha \sum_k^h fu \cos\alpha(x+y+\ldots+z-u).$$

Donc nous aurons, en changeant l'ordre des sommations,

$$(6)\qquad \frac{1}{\pi}\sum_k^h fu \int_0^\pi d\alpha \sum_0 \sum_0 \cdots \sum_0 \{x\}^{p-1}\{y\}^{q-1}\ldots\{z\}^{r-1}\cos\alpha(x+y+\ldots+z-u)$$

(k est un nombre négatif quelconque).

Les sommations par rapport à x, y, etc., peuvent à présent s'étendre jusqu'à l'infini.

Nous allons déterminer les valeurs de

$$\sum_0^\infty \{x\}^{p-1}\cos\alpha x, \quad \text{et de} \quad \sum_0^\infty \{x\}^{p-1}\sin\alpha x.$$

Soit $z = e^{\alpha\sqrt{-1}}$; nous aurons, par un théorème connu,

$$2\sum_0^\infty a^{-x}\cos\alpha x = \frac{1}{1-\frac{z}{a}} + \frac{1}{1-\frac{1}{az}},$$

puisqu'on a

$$1+\frac{z}{a}+\text{etc.} = \frac{1}{1-\frac{z}{a}}, \quad \text{et} \quad 1+\frac{1}{za}+\text{etc.} = \frac{1}{1-\frac{1}{za}}.$$

Pareillement on a

$$1+\frac{p}{1}\frac{z}{a}+\frac{p.p+1}{1.2}\frac{z^2}{a^2}+\text{etc.} = \frac{1}{\left(1-\frac{z}{a}\right)^p},$$

et de là

$$(7)\qquad \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1)} a^{-p} z + \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(2)} a^{-(p+1)} z^2 + \text{etc.} = \Gamma(p) \frac{z}{(a-z)^p}.$$

En écrivant dans cette équation z^{-1} au lieu de z, elle deviendra

$$\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(1)} a^{-p} z^{-1} + \text{etc.} = \Gamma(p) \frac{z^{-1}}{(a-z^{-1})^p}.$$

Ajoutant cette équation à la dernière, nous aurons, à cause de $\{x\}^p = \frac{\Gamma(x+p)}{\Gamma(x)}$,

$$(8)\qquad 2\sum_0^\infty \{x\}^{p-1} a^{-(x+p-1)} \cos \alpha x = \Gamma(p) \left\{\frac{z}{(a-z)^p} + \frac{z^{-1}}{(a-z^{-1})^p}\right\}.$$

(On doit remarquer que $\{0\}^p = 0$, puisque $\Gamma(0)$ a une valeur infinie.)

Ensuite, à cause de

$$(a-z)(a-z^{-1}) = 1 - 2a\cos\alpha + a^2,$$

nous aurons

$$\frac{z}{(a-z)^p} + \frac{z^{-1}}{(a-z^{-1})^p} = \frac{1}{(1-2a\cos\alpha+a^2)^p}\left(z(a-z^{-1})^p + z^{-1}(a-z)^p\right).$$

Mais, puisque $z = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$,

$$a - z = \sin\alpha\,(a\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cotang}\alpha - \sqrt{-1}).$$

Posons donc

$$\operatorname{cotang}\varphi = a\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{cotang}\alpha,$$

la valeur de $(a-z)^p$ deviendra

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}\right)^p (\cos p\varphi - \sqrt{-1}\sin p\varphi),$$

tandis que celle de $(a-z^{-1})^p$ sera

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}\right)^p (\cos p\varphi + \sqrt{-1}\sin p\varphi);$$

par conséquent

$$z(a - z^{-1})^p + z^{-1}(a - z)^p = 2\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}\right)^p \cos(p\varphi + \alpha).$$

Mais la valeur de $\sin\varphi$ est égale à $\dfrac{\sin\alpha}{(1 - 2a\cos\alpha + a^2)^{\frac{1}{2}}}$. Donc, nous aurons finalement

$$(9)\qquad \sum_0^\infty \{x\}^{p-1} a^{-(x+p-1)} \cos\alpha x = \Gamma(p)\frac{\cos(p\varphi + \alpha)}{(1 - 2a\cos\alpha + a^2)^{\frac{p}{2}}}.$$

On trouvera de la même manière que

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_0^\infty \{x\}^{p-1} a^{-(x+p-1)} \sin\alpha x = \Gamma(p)\frac{\sin(p\varphi + \alpha)}{(1 - 2a\cos\alpha + a^2)^{\frac{p}{2}}}.\\ &(a > 1).\end{aligned}\right.$$

A présent faisons $a = 1$. Alors nous aurons

$$\operatorname{cotang}\varphi = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2},$$

c'est-à-dire

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},$$

et les équations (9) et (10) deviendront

$$(11)\qquad \sum_0^\infty \{x\}^{p-1} \cos\alpha x = \Gamma(p)\frac{\cos\left(\frac{p}{2}(\pi - \alpha) + \alpha\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^p},$$

$$(12)\qquad \sum_0^\infty \{x\}^{p-1} \sin\alpha x = \Gamma(p)\frac{\sin\left(\frac{p}{2}(\pi - \alpha) + \alpha\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^p}.$$

Au moyen de ces équations, on prouvera facilement que

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_0^\infty\sum_0^\infty\cdots\sum_0^\infty \{x\}^{p-1}\{y\}^{q-1}\ldots\{z\}^{r-1}\cos\alpha(x + y + \ldots + z - u)\\ &\quad = \Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r)\frac{\cos\left(\frac{p + q + \ldots r}{2}(\pi - \alpha) + n\alpha - \alpha u\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{p+q+\ldots r}},\end{aligned}\right.$$

n étant le nombre des variables $x, y, \ldots, z$.

Mais en écrivant, dans l'équation (11), $p+q+\ldots r$ au lieu de p, on aura

$$\sum_0^\infty \{x\}^{p+q+\ldots r-1}\cos\alpha x = \Gamma(p+q+\ldots r)\frac{\cos\left(\frac{p+q+\ldots r}{2}(\pi-\alpha)+\alpha\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{p+q+\ldots r}},$$

et pareillement

$$\sum_0^\infty \{x\}^{p+q+\ldots r-1}\sin\alpha x = \Gamma(p+q+\ldots r)\frac{\sin\left(\frac{p+q+\ldots r}{2}(\pi-\alpha)+\alpha\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{p+q+\ldots r}}.$$

En combinant ces deux équations, on trouvera que

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_0^\infty \{x\}^{p+q+\ldots r-1}\cos\alpha(x-v)\\&=\Gamma(p+q+\ldots r)\frac{\cos\left(\frac{p+q+\ldots r}{2}(\pi-\alpha)+\alpha-\alpha v\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{p+q+\ldots r}}.\end{aligned}\right.$$

Mettons donc

$$v = u - n + 1,$$

et comparons les équations (13) et (14), nous aurons

$$(15)\left\{\begin{aligned}&\sum_0^\infty\sum_0^\infty\cdots\sum_0^\infty \{x\}^{p-1}\{y\}^{q-1}\ldots\{z\}^{r-1}\cos\alpha(x+y+\ldots z-u)\\&=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r)}{\Gamma(p+q\ldots+r)}\sum_0^\infty \{x\}^{p+q+\ldots r-1}\cos\alpha(x-(u-n+1)).\end{aligned}\right.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $d\alpha$ et en intégrant depuis zéro jusqu'à π, nous aurons, par la formule (3),

$$(16)\left\{\begin{aligned}&\int_0^\pi d\alpha\sum_0^\infty\sum_0^\infty\cdots\sum_0^\infty \{x\}^{p-1}\{y\}^{q-1}\ldots\{z\}^{r-1}\cos\alpha(x+y+\ldots z-u)\\&=\pi\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+\ldots+r)}\{u-n+1\}^{p+q+\ldots r-1},\end{aligned}\right.$$

pour toutes les valeurs positives de $u-n+1$.

Pour toutes les valeurs négatives de cette quantité, le second membre de l'équation (16) est égal à zéro.

Donc, en effectuant la sommation par rapport à u, il est inutile de donner à u des valeurs moindres que $n - 1$. Cela posé, nous aurons finalement, en considérant la formule (4),

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_0\sum_0\cdots\sum_0 \{x\}^{p-1}\{y\}^{q-1}\ldots\{z\}^{r-1} f(x+y+\ldots+z)\\ &\quad = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+\ldots r)}\sum_{n-1}^{h} fu\{u-n+1\}^{p+q+\ldots r-1},\end{aligned}\right.$$

l'étendue des sommations étant déterminée par l'inégalité

$$x + y + \ldots + z \stackrel{=}{<} h.$$

Ce théorème est l'analogue pour les différences finies du théorème de M. Liouville, dont j'ai déjà parlé.

En effet, en supposant que l'inégalité qui détermine les limites des variables soit, comme ci-dessus,

$$x + y + \ldots + z \stackrel{=}{<} h,$$

voici le théorème de M. Liouville :

$$\begin{aligned} &\int_0 dx \int_0 dy \ldots \int_0 dz\, x^{p-1} y^{q-1}\ldots z^{r-1} f(x+y+\ldots+z)\\ &\quad = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+\ldots r)}\int_0^h fu\, u^{p+q+\ldots r-1}\, du.\end{aligned}$$

Il est vrai que cette équation n'est qu'un cas particulier du résultat qu'a donné M. Liouville, mais malheureusement nous ne pouvons pas généraliser la formule (17) en supposant que l'étendue des sommations soit donnée par l'inégalité

$$ax + by + \ldots + cz \stackrel{=}{<} h,$$

sans au moins lui donner une forme beaucoup plus compliquée.

A présent, désignons, suivant la notation usitée, par $[x]^p$ la fonction $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-p+1)}$ (nous aurons, quand p sera un nombre entier,

$$[x]^p = x.x - 1\ldots x - p + 1),$$

et tâchons d'évaluer la somme suivante,

$$\sum_{p-1}\sum_{q-1}\cdots\sum_{r-1}[x]^{p-1}[y]^{q-1}\ldots[z]^{r-1}f(x+y+\ldots z),$$

dans laquelle x peut prendre toutes les valeurs $p-1$, p, $p+1$, etc., tandis que y peut prendre toutes les valeurs $q-1$, q, $q+1$, etc., et ainsi de suite pour les autres variables. L'étendue des sommations est déterminée par l'inégalité

$$x+y+\ldots+z \overset{=}{<} h,$$

dans laquelle h est égale à $p+q+\ldots r+$ un nombre entier.

Nous allons premièrement trouver les valeurs de

$$\sum_{p-1}^{\infty}[x]^{p-1}\cos\alpha x,\quad \text{et de}\quad \sum_{p-1}^{\infty}[x]^{p-1}\sin\alpha x.$$

Puisque nous avons

$$1+\frac{p}{1}az+\frac{p.p+1}{1.2}a^2z^2+\text{etc.}=\frac{1}{(1-az)^p};$$

il s'ensuit que

$$\frac{\Gamma(p-1+1)}{\Gamma(1)}z^{p-1}+\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(2)}az^p+\text{etc.}=\Gamma(p)\frac{z^{p-1}}{(1-az)^p}.$$

Remplaçons z par z^{-1}, nous aurons, en ajoutant les deux résultats et en posant $a=1$,

$$\begin{aligned}&[p-1]^{p-1}\cos\alpha(p-1)+[p]^{p-1}\cos\alpha p+\text{etc.}\\&\quad=\frac{1}{2}\Gamma(p)\left(\frac{z^{p-1}}{(1-z)^p}+\frac{z^{-p+1}}{(1-z^{-1})^p}\right),\end{aligned}$$

c'est-à-dire nous aurons

$$\sum_{p-1}^{\infty}[x]^{p-1}\cos\alpha x=\frac{1}{2}\Gamma(p)\left(\frac{z^{p-1}}{(1-z)^p}+\frac{z^{-p+1}}{(1-z^{-1})^p}\right).$$

et pareillement

$$\sum_{p-1}^{\infty}[x]^{p-1}\sin\alpha x=\frac{1}{2}\Gamma(p)\left(\frac{z^{p-1}}{(1-z)^p}-\frac{z^{-p+1}}{(1-z^{-1})^p}\right).$$

Il est facile de voir, en suivant à peu près la même route qu'auparavant, que ces deux équations reviennent à celles-ci :

$$(18)\qquad \sum_{p-1}^{\infty} [x]^{p-1} \cos \alpha x = \Gamma(p) \frac{\cos\left(\frac{p}{2}(\pi-\alpha)-\alpha\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{p}},$$

$$(19)\qquad \sum_{p-1}^{\infty} [x]^{p-1} \sin \alpha x = \Gamma(p) \frac{\sin\left(\frac{p}{2}(\pi-\alpha)-\alpha\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{p}}.$$

Cela posé, on peut facilement s'assurer que la somme dont nous cherchons la valeur est égale à

$$\frac{1}{\pi}\sum^{h} fu \int_0^{\pi} d\alpha \sum_{p-1}^{\infty}\sum_{q-1}^{\infty}\cdots\sum_{r-1}^{\infty} [x]^{p-1}[y]^{q-1}\ldots[z]^{r-1}\cos\alpha(x+y\ldots z-u).$$

Par conséquent elle est égale, en vertu des formules (18) et (19), à

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r)}{\pi}\sum^{h} fu\int_0^{\pi} d\alpha\, \frac{\cos\left(\frac{p+q+\ldots r}{2}(\pi-\alpha)-n\alpha-\alpha u\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{p+q+\ldots r}},$$

et de là nous aurons finalement

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{p-1}\sum_{q-1}\cdots\sum_{r-1}[x]^{p-1}[y]^{q-1}\ldots[z]^{r-1}f(x+y+\ldots z)\\ &=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+\ldots r)}\sum_{p+q+\ldots r-1}^{h} fu\,[u+n-1]^{p+q+\ldots r-1}.\end{aligned}\right.$$

Les deux résultats (17) et (20) suffisent pour montrer l'esprit de notre analyse, mais je vais encore l'appliquer à un autre exemple.

Évaluons l'expression

$$(21)\qquad \sum_0\sum_0\cdots\sum_0 a^x b^y\ldots c^z f(mx+ny+\ldots pz),$$

$mx+ny+\ldots pz \overset{=}{<} h$ étant l'inégalité qui détermine l'étendue des sommations.

Je suppose que $m, n, \ldots, p$ soient des nombres entiers. En faisant

$$mx=x',\ ny=y',\ \text{etc.};\quad a^{\frac{1}{2n}}=a',\ b^{\frac{1}{n}}=b',\ \text{etc.},$$

la formule (21) deviendra

$$\sum_0 \sum_0 \cdots \sum_0 a'^{x'} b'^{y'} \ldots c'^{z'} f(x' + y' + \ldots z').$$

Nous pouvons donc admettre que $m, n, \ldots, p$ soient égales à l'unité; le résultat général se déduira facilement de ce cas particulier.

Nous aurons d'abord

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_0 \sum_0 \cdots \sum_0 a^x b^y \ldots c^z f(x + y + \ldots z) \\ & = \frac{1}{\pi} \sum^h fu \int_0^\pi d\alpha \sum_0^\infty \sum_0^\infty \cdots \sum_0^\infty a^x b^y \ldots c^z \cos \alpha (x + y + \ldots z - u). \end{aligned} \right.$$

A présent, puisque

$$\sum_0^\infty a^x \cos \alpha x = \frac{1 - a \cos \alpha}{1 - 2a \cos \alpha + a^2},$$

$$\sum_0^\infty a^x \sin \alpha y = \frac{a \sin \alpha}{1 - 2a \cos \alpha + a^2},$$

nous pouvons effectuer les sommations indiquées dans le second membre de l'équation (22).

En effet, on verra, avec un peu d'attention, que nous aurons

$$(23)\qquad \sum_0^\infty \sum_0^\infty \cdots \sum_0^\infty a^x b^y \ldots c^z \cos \alpha (x + y + \ldots z - u) = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}},$$

D étant égal à

$$(1 - 2a \cos \alpha + a^2) \ldots (1 - 2c \cos \alpha + c^2),$$

tandis que N est égal à

$$\cos \alpha u - \mathrm{S} a . \cos \alpha (u + 1) + \mathrm{S} ab . \cos \alpha (u + 2) - \ldots \pm ab \ldots c \cos \alpha (u + \nu),$$

le signe de sommation S ayant rapport aux ν quantités $a, b, \ldots, c$.

Afin de donner à $\frac{1}{\mathrm{D}}$ une forme plus commode, posons l'équation

$$\frac{1}{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{A}}{1 - 2a \cos \alpha + a^2} + \ldots + \frac{\mathrm{C}}{1 - 2c \cos \alpha + c^2};$$

donc nous aurons

$$A = \frac{a^{\nu-1}}{(a-b)\ldots(a-c)} \cdot \frac{1}{(1-ab)\ldots(1-ac)},$$

et ainsi de suite pour B,..., C.

Or, nous savons que

$$\frac{1}{1-2a\cos\alpha+a^2} = \frac{1}{1-a^2}(1+2a\cos\alpha+\text{etc.}),$$

et de là il est visible que le terme de $\frac{NA}{1-2a\cos\alpha+a^2}$, qui ne renferme pas α, est égal à

$$\frac{a^{\nu-1}}{(a-b)\ldots(a-c)}\,\frac{1}{(1-a^2)(1-ab)\ldots(1-ac)}(a^u - a^{u+1}\mathrm{S}a + a^{u+2}\mathrm{S}ab - \text{etc.}),$$

ou à

$$\frac{a^{u+\nu-1}}{(a-b)\ldots(a-c)},$$

puisque

$$\frac{1-a\mathrm{S}a+a^2\mathrm{S}ab-\text{etc.}}{(1-a^2)(1-ab)\ldots(1-ac)} = 1.$$

Nous voyons donc que, pour toutes les valeurs positives de u et pour $u=0$,

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\alpha \sum_0^\infty\sum_0^\infty\ldots\sum_0^\infty a^x b^y\ldots c^z \cos\alpha\,(x+y+\ldots z-u) \\ &\qquad = \frac{a^{u+\nu-1}}{(a-b)\ldots(a-c)} + \frac{b^{u+\nu-1}}{(b-a)\ldots(b-c)} + \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

Si u est négatif, faisons $u=-u'$, nous aurons

$$N = \cos\alpha u' - \mathrm{S}a.\cos\alpha(u'-1) + \text{etc.} \pm ab\ldots c\cos\alpha(u'-\nu),$$

et le terme de $\frac{NA}{1-2a\cos\alpha+a^2}$, qui ne renfermera pas α, sera égal à

$$\frac{a^{u'+\nu-1}}{(a-b)\ldots(a-c)}\,\frac{1-a^{-1}\mathrm{S}a+a^{-2}\mathrm{S}ab-\text{etc.}}{(1-a^2)(1-ab)\ldots(1-ac)}.$$

En supposant que u' ne soit pas moindre que ν, il est visible que

$$1 - a^{-1}\mathrm{S}a + a^{-2}\mathrm{S}ab - \text{etc.} = 0.$$

Si u' est moindre que ν, alors la formule précédente n'est pas égale à zéro, mais l'ensemble des termes semblables tels que

$$\frac{b^{u+\nu-1}}{(b-a)\ldots(b-c)}\,\frac{1-b^{-1}\,\mathrm{S}a+\text{etc.}}{(1-b^2)(1-ba)\ldots(1-bc)}$$

disparaîtra; c'est ce que nous allons démontrer.

Désignons par $\mathrm{S}_{u'}$ l'ensemble de toutes les combinaisons qu'on peut faire u' des ν quantités $a, b, \ldots, c$. Si u' est moindre que ν, le terme de $\frac{\mathrm{NA}}{1-2a\cos\alpha+a^2}$, qui ne renfermera pas α, sera égal à

$$(25)\qquad \frac{\mathrm{A}}{1-a^2}(a^{u'}-a^{u'-1}\,\mathrm{S}_1+\ldots\pm\mathrm{S}_{u'}\mp a\,\mathrm{S}_{u'+1}\pm\ldots\pm a^{\nu-u'}\,\mathrm{S}_\nu);$$

or

$$a^{u'}-a^{u'-1}\,\mathrm{S}_1+\ldots\pm\mathrm{S}_{u'}\mp a^{-1}\,\mathrm{S}_{u'+1}\pm\ldots\pm a^{-\nu+u'}\,\mathrm{S}_\nu=0.$$

Il suit de là que la formule (25) est égale à

$$\mp\frac{\mathrm{A}}{1-a^2}(\mathrm{S}_{u'+1}(a-a^{-1})-\mathrm{S}_{u'+2}(a^2-a^{-2})+\ldots\pm\mathrm{S}_\nu(a^{\nu-u'}-a^{-\nu+u'})),$$

et, en ajoutant toutes les formules semblables, nous aurons

$$\begin{aligned}
&\mp\mathrm{S}_{u'+1}\left(\frac{\mathrm{A}}{1-a^2}(a-a^{-1})+\frac{\mathrm{B}}{1-b^2}(b-b^{-1})+\ldots\right),\\
&\pm\mathrm{S}_{u'+2}\left(\frac{\mathrm{A}}{1-a^2}(a^2-a^{-2})+\frac{\mathrm{B}}{1-b^2}(b^2-b^{-2})+\ldots\right),\\
&\mp\text{etc.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\pm\mathrm{S}_\nu\left(\frac{\mathrm{A}}{1-a^2}(a^{\nu-u'}-a^{-\nu+u'})+\frac{\mathrm{B}}{1-b^2}(b^{\nu-u'}-b^{-\nu+u'})+\ldots\right).
\end{aligned}$$

Or, je dis que chacune de ces quantités est séparément égale à zéro. En remplaçant $2\cos\alpha$ par $z+z^{-1}$, nous aurons

$$\frac{z^\nu}{(1-az)\ldots(1-cz)(z-a)\ldots(z-c)}=\frac{\mathrm{A}z}{1-a^2}\left(\frac{a}{1-az}-\frac{a^{-1}}{1-a^{-1}z}\right)+\text{etc.}$$

Si nous développons les deux membres de cette équation selon les puissances positives de z, la puissance la moins élevée qui se trouvera dans le premier membre sera z^ν. Par conséquent, nous voyons que

$$\frac{\mathrm{A}}{1-a^2}(a^p-a^{-p})+\frac{\mathrm{B}}{1-b^2}(b^p-b^{-p})+\text{etc.}=0,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de p qui sont moindres que ν, ce qu'il fallait démontrer.

Donc, finalement, pour toutes les valeurs négatives de u,

$$(26)\qquad \int_0^\pi \sum_0^\infty \sum_0^\infty \ldots \sum_0^\infty a^x b^y \ldots c^z \cos\alpha(x+y+\ldots z-u) = 0.$$

A présent, il est facile de voir que

$$(27)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_0 \sum_0 \ldots \sum_0 a^x b^y \ldots c^z f(x+y+\ldots z) \\ &= \sum_0^h fu \left(\frac{a^{u+\nu-1}}{(a-b)\ldots(a-c)} + \ldots + \frac{c^{u+\nu-1}}{(c-a)\ldots(c-b)} \right), \end{aligned} \right.$$

ce qui est le résultat que nous cherchions.

J'ai démontré, dans le *Journal de Mathématiques* de Cambridge, une équation que je vais reproduire ici, afin qu'on puisse la comparer avec l'équation dernière. Les limites étant déterminées par l'inégalité

$$x + y + \ldots z \leqq h,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} &\int_0 dx \int_0 dy \ldots \int_0 dz\, e^{-ax-by-\ldots cz} f(x+y+\ldots z) \\ &= \int_0^h fu\, du \left(\frac{e^{-au}}{(b-a)\ldots(c-a)} + \ldots + \frac{e^{-cu}}{(a-c)(b-c)\ldots} \right). \end{aligned}$$

Les résultats que nous avons obtenus sont, ce me semble, d'un genre nouveau : c'est pourquoi je pense qu'ils pourront peut-être intéresser les géomètres.