JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

De la ligne géodésique sur un ellipsoïde quelconque

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 401-408.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__401_0>

DE LA LIGNE GÉODÉSIQUE SUR UN ELLIPSOÏDE QUELCONQUE;

Par J. LIOUVILLE.

L'équation différentielle de la ligne géodésique (la ligne la plus courte) sur un ellipsoïde à trois axes inégaux, se présente sous une forme extrêmement compliquée lorsqu'on fait usage des coordonnées ordinaires. Aussi les géomètres avaient-ils été rebutés de la traiter. Mais M. Jacobi a observé qu'elle devient beaucoup plus maniable quand on se sert, pour déterminer la position d'un point sur l'ellipsoïde, des deux lignes de courbure passant par ce point, genre tout particulier de coordonnées dont Legendre s'est autrefois servi avec succès. L'illustre géomètre de Kœnigsberg est parvenu, de cette manière, à ramener la détermination de la ligne géodésique demandée aux simples quadratures. On peut voir, dans le tome VI de ce Journal (page 267) la formule élégante qu'il a obtenue et dans laquelle figurent des transcendantes abéliennes. M. Jacobi s'est contenté de poser cette formule sans ajouter la démonstration; mais en indiquant le système de coordonnées qu'il a employé, il a, par cela même, rendu cette démonstration très-facile à trouver. Je viens après d'autres géomètres en présenter une à mon tour, en y joignant quelques remarques qui me semblent utiles.

Je prends pour point de départ ce théorème connu (ou, si l'on veut, cette définition), que la ligne géodésique pour une surface est celle que décrirait, à la suite d'une impulsion quelconque, un mobile assujetti à demeurer sur la surface et dont le mouvement ne serait altéré par aucune force accélératrice.

Soient

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

les équations de trois surfaces du second degré, l'une ellipsoïdale, les deux autres hyperboliques à une nappe et à deux nappes. En regardant ρ, μ, ν comme trois variables, on pourra faire passer ces surfaces par tout point (x, y, z) de l'espace; leur intersection déterminera ainsi ce point dont ρ, μ, ν seront les coordonnées. Mais ces coordonnées se réduiront à deux (μ, ν) lorsqu'on se borne à considérer les points situés sur l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

ce qui aura lieu dans la question qui nous occupe, pourvu qu'on représente par

$$2\rho, \quad 2\sqrt{\rho^2 - b^2}, \quad 2\sqrt{\rho^2 - c^2},$$

les axes principaux de l'ellipsoïde dont on veut déterminer la ligne géodésique; les deux variables ou coordonnées μ, ν se rapportent respectivement aux deux genres de lignes de courbure de la surface dont

$$\nu = \textit{constante}, \quad \text{et} \quad \mu = \textit{constante},$$

sont les équations respectives.

On sait, et il est facile de vérifier [*] que les éléments de ces lignes de courbure à partir d'un point donné (ρ, μ, ν) sont

$$ds' = \sqrt{p}.d\mu, \quad ds'' = \sqrt{q}.d\nu,$$

en faisant

$$p = \frac{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}, \quad q = \frac{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}.$$

Le carré de la vitesse d'un mobile sur l'ellipsoïde (ds désignant l'élément décrit pendant le temps dt) est, par suite,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{ds''}{dt}\right)^2 = p\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + q\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2;$$

---

[*] *Voyez* dans le tome II de ce Journal (page 147) un Mémoire de M. Lamé, mais en ayant soin d'observer que l'auteur désigne par les lettres μ, ν, ρ ce que nous désignons ici respectivement par ρ, μ, ν.

et si ce mobile n'est sollicité par aucune force accélératrice (auquel cas la ligne décrite sera précisément la ligne géodésique), on aura, d'après les formules de la *Mécanique analytique*, les deux équations suivantes du mouvement,

$$\frac{d.p\frac{d\mu}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{dq}{d\mu}\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d.q\frac{d\nu}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dp}{d\nu}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{dq}{d\nu}\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2;$$

écrivons aussi l'équation des *forces vives* qui s'en déduit,

$$p\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + q\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = \textit{une constante } \mathrm{C}.$$

Maintenant, soit

$$\frac{\rho^2-\mu^2}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)} = m, \qquad \frac{\rho^2-\nu^2}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)} = n;$$

d'où

$$p = m(\mu^2-\nu^2), \quad q = n(\mu^2-\nu^2).$$

En substituant ces valeurs dans la première des équations du mouvement et développant les calculs, on aura

$$m(\mu^2-\nu^2)\frac{d^2\mu}{dt^2} + (\mu^2-\nu^2)\frac{dm}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + 2m\mu\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 - 2m\nu\frac{d\nu}{dt}\frac{d\mu}{dt}$$
$$= \frac{1}{2}(\mu^2-\nu^2)\frac{dm}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + m\mu\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + n\mu\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2,$$

d'où

$$m(\mu^2-\nu^2)\frac{d^2\mu}{dt^2} + \frac{1}{2}(\mu^2-\nu^2)\frac{dm}{d\mu}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + 2m\mu\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 - 2m\nu\frac{d\nu}{dt}\frac{d\mu}{dt}$$
$$= \mu\left[m\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + n\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2\right] = \frac{\mathrm{C}\mu}{\mu^2-\nu^2},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{m}\,\frac{d.(\mu^2-\nu^2)\sqrt{m}\frac{d\mu}{dt}}{dt} = \frac{\mathrm{C}\mu}{\mu^2-\nu^2}.$$

Multipliant par $2(\mu^2 - \nu^2)\,d\mu$, et intégrant, on aura donc

$$m(\mu^2 - \nu^2)^2 \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 = \mathrm{A} + \mathrm{C}\mu^2,$$

A étant une constante. La seconde équation du mouvement, traitée d'une manière semblable, fournira

$$n(\mu^2 - \nu^2)^2 \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = \mathrm{B} - \mathrm{C}\nu^2.$$

Il est d'ailleurs aisé de voir que les constantes A et B sont égales au signe près, car en ajoutant membre à membre les équations que nous venons d'obtenir, on a

$$(\mu^2 - \nu^2)\left[p\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + q\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2\right] = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}(\mu^2 - \nu^2),$$

d'où

$$\mathrm{B} = -\mathrm{A},$$

puisque le premier membre est égal à $\mathrm{C}(\mu^2 - \nu^2)$ en vertu de l'équation des forces vives.

En divisant ces mêmes équations membre à membre, nous aurons dès lors

$$\frac{md\mu^2}{nd\nu^2} = \frac{\mathrm{C}\mu^2 - \mathrm{B}}{\mathrm{B} - \mathrm{C}\nu^2} = \frac{\mu^2 - \beta}{\beta - \nu^2},$$

β étant, comme B et C, une constante arbitraire.

Cette équation peut être mise sous une forme assez élégante; elle donne en effet

$$\beta = \frac{n\mu^2 d\nu^2 + m\nu^2 d\mu^2}{nd\nu^2 + md\mu^2} = \frac{\mu^2 ds''^2 + \nu^2 ds'^2}{ds^2},$$

d'où

$$\beta = \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i,$$

i étant l'angle compris entre ds et ds'' [*]. Mais la formule que nous avons trouvée d'abord est plus commode pour achever le calcul.

---

[*] Sur une surface quelconque la ligne géodésique jouit de cette propriété, que le plan osculateur est en chaque point normal à la surface. C'est ce qu'on prouve aisément

Extrayant la racine carrée des deux membres, et prenant, pour fixer les idées, le signe — dans le second, on en conclut de suite

$$\int \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\,.\,d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \beta}} = \alpha - \int \frac{\sqrt{\rho^2 - \nu^2}\,.\,d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}\sqrt{\beta - \nu^2}}.$$

Telle est l'équation demandée de la ligne géodésique sur un ellipsoïde à trois axes. C'est, aux notations près, celle de M. Jacobi, qui, du reste, au lieu des variables μ et ν, emploie deux variables φ et ψ liées à celles-là par les relations

$$\nu = b\cos\psi, \quad \mu = \sqrt{c^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

L'élément ds de la ligne géodésique est exprimé par

$$ds = \sqrt{pd\mu^2 + qd\nu^2}.$$

D'ailleurs, en multipliant ses deux membres par $\sqrt{\mu^2 - \nu^2}$, l'équation

$$\frac{\sqrt{m}\,.\,d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \beta}} = -\frac{\sqrt{n}\,.\,d\nu}{\sqrt{\beta - \nu^2}}$$

nous donne

$$\frac{\sqrt{p}\,.\,d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \beta}} = -\frac{\sqrt{q}\,.\,d\nu}{\sqrt{\beta - \nu^2}}.$$

On en conclut

$$ds = \sqrt{pd\mu^2 + \frac{p(\beta - \nu^2)d\mu^2}{\mu^2 - \beta}} = \frac{d\mu\sqrt{p(\mu^2 - \nu^2)}}{\sqrt{\mu^2 - \beta}},$$

---

par la géométrie. De là une équation différentielle du second ordre dont

$$\mu^2\cos^2 i + \nu^2\sin^2 i = \beta$$

est une intégrale première pour le cas particulier de l'ellipsoïde. Ne pourrait-on pas arriver aussi par des considérations purement géométriques à cette intégrale première dont la forme est si simple, ou (ce qui est au fond la même chose) au théorème curieux démontré par M. Joachimsthal dans le Journal de M. Crelle, savoir, que PD = *constante*, le long de la ligne géodésique, D étant le demi-diamètre de l'ellipsoïde parallèle à l'élément ds, et P la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à la surface en un point de cet élément?

ou bien

$$ds = \frac{(\mu^2 - \nu^2)\sqrt{m}\ d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \beta}} = \frac{\mu^2\sqrt{m}\,.\,d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \beta}} - \frac{\nu^2\sqrt{m}\,.\,d\mu}{\sqrt{\mu^2 - \beta}},$$

et enfin

$$ds = \frac{\mu^2\sqrt{m}}{\sqrt{\mu^2 - \beta}}\,d\mu + \frac{\nu^2\sqrt{n}}{\sqrt{\beta - \nu^2}}\,d\nu.$$

Ici les variables sont séparées comme dans l'équation même de la courbe; on a donc cette formule très-remarquable

$$s = \int \frac{\mu^2\sqrt{m}}{\sqrt{\mu^2 - \beta}}\,d\mu + \int \frac{\nu^2\sqrt{n}}{\sqrt{\beta - \nu^2}}\,d\nu + \textit{constante}.$$

Les limites supérieures de nos intégrales sont, bien entendu, les variables mêmes μ, ν; quant aux limites inférieures, ce sont des quantités choisies arbitrairement une fois pour toutes.

Soit, pour abréger,

$$\Delta(\mu^2) = \pm\sqrt{\mu^2(\rho^2 - \mu^2)(b^2 - \mu^2)(c^2 - \mu^2)(\beta - \mu^2)}.$$

L'équation que nous avons trouvée pour la ligne géodésique peut s'écrire

$$\int \frac{(\rho^2 - \mu^2)\,d(\mu^2)}{\Delta(\mu^2)} + \int \frac{(\rho^2 - \nu^2)\,d(\nu^2)}{\Delta(\nu^2)} = 2\alpha.$$

$\Delta^2(\mu^2)$ étant par rapport à μ^2 un polynôme du cinquième degré, les intégrales qui entrent dans le premier membre sont des intégrales abéliennes de première classe et de première espèce; en désignant donc par h une constante quelconque différente de ρ, et faisant

$$\int \frac{(h^2 - \mu^2)\,d(\mu^2)}{\Delta(\mu^2)} + \int \frac{(h^2 - \nu^2)\,d(\nu^2)}{\Delta(\nu^2)} = u,$$

on aura

$$\mu^2 = \lambda(2\alpha, u), \quad \nu^2 = \lambda_1(2\alpha, u),$$

λ et λ_1 indiquant les fonctions inverses que M. Jacobi a introduites en analyse. Ces fonctions à deux variables, que l'emploi de l'auxiliaire u nous a permis de mettre en évidence, jouissent de nombreuses propriétés. On sait, par exemple, qu'elles ont quatre périodes distinctes. On sait aussi que

$$\lambda(2\alpha + 2\alpha', u + u'), \quad \lambda_1(2\alpha + 2\alpha', u + u')$$

s'expriment algébriquement (et même à l'aide de radicaux carrés seulement) par $\lambda(2\alpha, u)$, $\lambda_1(2\alpha, u)$, $\lambda(2\alpha', u')$, $\lambda_1(2\alpha', u')$. Enfin $\lambda(2\alpha, u)$, $\lambda_1(2\alpha, u)$, où les arguments α et u sont quelconques, s'expriment de la même manière à l'aide des fonctions où un seul argument reste variable, l'autre étant égal à une constante quelconque, à zéro si l'on veut.

Quant à la formule pour l'arc s, elle se compose d'intégrales abéliennes du même genre que les précédentes, mais de seconde espèce, car

$$s = \int \frac{\mu^2(\rho^2-\mu^2)\,d(\mu^2)}{\Delta(\mu^2)} + \int \frac{\nu^2(\rho^2-\nu^2)\,d(\nu^2)}{\Delta(\nu^2)} + \textit{constante}.$$

Introduisons avec M. Hermite les quantités α et u, au lieu de μ et ν qui en dépendent, puis posons

$$\int \frac{\mu^2(\rho^2-\mu^2)\,d(\mu^2)}{\Delta(\mu^2)} + \int \frac{\nu^2(\rho^2-\nu^2)\,d(\nu^2)}{\Delta(\nu^2)} = \mathrm{E}(2\alpha, u);$$

nous aurons

$$s = \mathrm{E}(2\alpha, u) - \mathrm{E}(2\alpha, u_0),$$

u_0 désignant la valeur de u pour laquelle on prend $s = 0$.

Or, il suit du célèbre théorème d'Abel sur les sommes d'intégrales, que

$$\mathrm{E}(2\alpha + 2\alpha', u + u') = \mathrm{E}(2\alpha, u) + \mathrm{E}(2\alpha', u') + \mathrm{R},$$

R désignant une fonction de $\lambda(2\alpha, u)$, $\lambda_1(2\alpha, u)$, $\lambda(2\alpha', u')$, $\lambda_1(2\alpha', u')$, algébrique et même dépendante de simples radicaux carrés. On sait aussi que $\mathrm{E}(2\alpha, u)$ s'exprime dans toute sa généralité par des fonctions à un seul argument, telles que $\mathrm{E}(2\alpha, 0)$, $\mathrm{E}(0, u)$, etc.

Tous ces théorèmes d'analyse qui établissent entre les coordonnées de certains points et les longueurs de certains arcs une relation dépendante uniquement de la règle et du compas, répondent à des théorèmes de géométrie analogues à ceux qu'on a autrefois obtenus pour les arcs d'ellipse[*]. Ils dérivent de la considération des amplitudes des

---

[*] Énonçons ici d'une manière plus précise un de ces théorèmes.

Donnons à α une valeur déterminée et à u deux valeurs particulières u_0, u: de là fonctions abéliennes. D'autres seront relatifs à leurs modules. Afin de bien fixer les idées, prenons pour la limite inférieure des intégrales relatives à ν^2 une constante absolue, zéro par exemple; prenons de même une constante absolue pour la limite inférieure des intégrales relatives à μ^2; soit enfin, si l'on veut, $h = 0$. Nos fonctions $\lambda(2\alpha, u)$, $\lambda_1(2\alpha, u)$ seront ainsi définies avec précision. Mais outre 2α et u, elles contiennent implicitement ρ, b, c, β. Pour un ellipsoïde donné, ρ, b, c sont donnés. Les lignes géodésiques en nombre infini que l'on peut concevoir sur cet ellipsoïde répondront aux diverses valeurs des constantes α, β; et c'est en faisant varier u seulement que l'on parcourra chacune d'elles. Considérons en particulier les lignes géodésiques qui répondent aux diverses valeurs de α et à une valeur fixe de β. Les coordonnées de chaque point de chacune d'entre elles étant fournies par

$$\mu^2 = \lambda(2\alpha, u), \quad \nu^2 = \lambda_1(2\alpha, u),$$

où λ et λ_1 sont des fonctions bien déterminées, les propriétés qu'on aura alors à rechercher dépendront des amplitudes 2α et u seulement. Mais si l'on fait varier β, les fonctions λ, λ_1 varieront aussi, et la considération des propriétés de leurs modules deviendra nécessaire. Il en sera de même si l'on veut comparer entre elles des lignes géodésiques relatives à divers ellipsoïdes, c'est-à-dire faire varier b, c ou ρ.

---

un arc s de ligne géodésique terminé aux deux points (μ_0, ν_0), (μ, ν) pour lesquels on a

$$\mu^2 = \lambda(2\alpha, u), \quad \nu^2 = \lambda_1(2\alpha, u), \quad \mu_0^2 = \lambda(2\alpha, u_0), \quad \nu_0^2 = \lambda_1(2\alpha, u_0).$$

Pour d'autres valeurs α', u'_0, u', on aura un autre arc s' terminé aux points (μ'_0, ν'_0), (μ', ν') pour lesquels

$$\mu'^2 = \lambda(2\alpha', u'), \quad \text{etc.}$$

Enfin le système des valeurs $\alpha + \alpha'$, $u_0 + u'_0$, $u + u'$ fournira un troisième arc s'' terminé aux points (μ''_0, ν''_0), (μ'', ν'') pour lesquels

$$\mu''^2 = \lambda(2\alpha + 2\alpha', \quad u + u'), \quad \text{etc.}$$

Or, des propriétés des fonctions abéliennes qu'on vient de rappeler, il suit immédiatement : 1° Que μ'', ν'' dépendront géométriquement de μ, ν, μ', ν', et μ''_0, ν''_0 de $\mu_0, \nu_0, \mu'_0, \nu'_0$; ainsi, les coordonnées des extrémités de s et s' étant données, on pourra trouver celles des points extrêmes de s''; 2° que l'arc s'' s'exprimera par la somme $s + s'$ des deux autres, à une quantité algébrique près dont la valeur pourra être construite au moyen de la règle et du compas.