JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUISEUX

Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 377-399.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__377_0>

PROBLÈMES

SUR LES DÉVELOPPÉES ET LES DÉVELOPPANTES

DES COURBES PLANES;

PAR M. PUISEUX.

PREMIÈRE PARTIE.

La cycloïde et la spirale logarithmique possèdent, comme on sait, la propriété de se reproduire dans leurs développées : on peut se demander si d'autres courbes n'en jouiraient pas également. On peut aussi considérer non-seulement la développée d'une courbe, mais la développée de cette développée, et ainsi de suite, et chercher si, dans cette série de courbes, il en est une que l'on puisse faire coïncider avec la courbe primitive, auquel cas les suivantes reproduiront périodiquement celles qui les précèdent. Enfin la question deviendra plus générale encore, si au lieu d'exiger que l'une de ces développées successives soit égale à la courbe d'où l'on est parti, on veut seulement qu'elle lui soit semblable. Nous nous proposerons donc, dans cette première partie, de trouver une courbe qui soit semblable à sa $n^{ième}$ développée [*].

Je remarquerai d'abord qu'il peut y avoir, entre deux figures situées dans le même plan, deux sortes d'égalités que j'appellerai égalité *directe* ou *inverse*, selon que pour faire coïncider les deux figures, il suffira de déplacer l'une d'elles dans son plan ou qu'il sera nécessaire de la retourner *sens dessus dessous* : de même, deux figures semblables pourront l'être *directement* ou *inversement*.

---

[*] Dans une Note insérée au tome VI de ce Journal (page 61), M. J. Binet annonce la solution d'un cas particulier du problème que je traite ici. Mon travail était presque entièrement terminé lorsque j'ai eu connaissance de cet article.

Or, la forme et la grandeur d'une courbe sont complétement déterminées lorsqu'on donne une relation $r = f(u)$ entre le rayon de courbure r d'un quelconque de ses points et l'angle u que ce rayon fait avec une direction fixe. L'équation d'une courbe directement égale à celle-là n'en pourra différer qu'en ce que l'angle u y sera augmenté d'une constante l, à moins qu'on ne veuille regarder comme négatifs dans la seconde les rayons vecteurs qui sont positifs dans la première, auquel cas r se changerait en $-r$; ainsi

$$r = \pm f(l + u):$$

telle est l'équation des courbes directement égales à la première. Mais pour obtenir l'équation des courbes qui lui sont inversement égales, il faudra changer u en $l - u$, et l'on aura

$$r = \pm f(l - u).$$

De même, une courbe dont les dimensions sont à celles de la courbe $r = f(u)$ dans le rapport de a à l'unité, aura pour équation

$$r = \pm af(l + u), \quad \text{ou} \quad r = \pm af(l - u),$$

suivant qu'elle lui sera directement ou inversement semblable.

Cela posé, par le point (r, u) d'une courbe traçons-lui une normale; par le point (r_1, u_1) où cette droite touche la développée, menons à celle-ci une normale; cette normale touchera le seconde développée en un point (r_2, u_2) par lequel nous mènerons encore une normale à cette dernière courbe, et ainsi de suite. On aura

$$u_1 = u + \frac{\pi}{2}, \quad u_2 = u_1 + \frac{\pi}{2}, \ldots, \quad u_n = u_{n-1} + \frac{\pi}{2},$$

et par suite

$$du = du_1 = du_2 = \ldots = du_n.$$

Si l'on remarque, de plus, que les arcs des développées successives ont pour différentielles dr, dr_1, dr_2, etc., on trouvera

$$r_1 = \pm \frac{dr}{du}, \quad r_2 = \pm \frac{dr_1}{du}, \ldots, \quad r_n = \pm \frac{dr_{n-1}}{du},$$

et par conséquent

$$r_n = \pm \frac{d^n r}{du^n}.$$

Si donc $r = f(u)$ est l'équation d'une courbe, on aura pour sa $n^{ième}$ développée

$$r_n = \pm f^{(n)}(u) = \pm f^{(n)}\left(u_n - \frac{n\pi}{2}\right),$$

et ces deux courbes seront directement semblables lorsqu'on aura

$$f^{(n)}\left(u_n - \frac{n\pi}{2}\right) = \pm af(l + u_n),$$

inversement semblables lorsqu'on aura

$$f^{(n)}\left(u_n - \frac{n\pi}{2}\right) = \pm af(l - u_n).$$

Ces deux équations, dans lesquelles il est permis de supposer a positif, peuvent s'écrire plus simplement

$$(1) \qquad f^{(n)}(u) = \pm af(h + u),$$

$$(2) \qquad f^{(n)}(u) = \pm af(h - u),$$

h désignant une nouvelle constante. Elles sont, comme on voit, aux différences mêlées, et il s'agit de les intégrer. Observons que si une courbe composée de deux branches symétriques par rapport à une droite répond à une de ces équations, elle satisfera en même temps à l'autre, car elle sera à la fois directement et inversement semblable à sa développée.

Considérons d'abord l'équation (2); en la différentiant n fois de suite, on trouve

$$f^{(2n)}(u) = \pm(-1)^n af^{(n)}(h - u);$$

mais si l'on y remplace u par $h - u$, elle devient

$$f^{(n)}(h - u) = \pm af(u).$$

Multipliant en croix ces deux dernières équations, nous obtiendrons l'équation différentielle linéaire

$$(3) \qquad f^{(2n)}(u) = (-1)^n a^2 f(u).$$

La valeur de $f(u)$ qui la vérifie est la somme de $2n$ termes de la forme Ae^{mu}, A étant une constante arbitraire, et m l'une des racines de l'équation

$$(4)\qquad m^{2n} = (-1)^n a^2.$$

Je nomme b la valeur arithmétique de $a^{\frac{1}{n}}$; les racines de l'équation (4) seront données par la formule

$$m = \pm b\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}\right) \pm \sqrt{-1}\,\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)\right],$$

où l'on doit faire successivement $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$, si n est pair, $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, si n est impair.

Dans le premier cas, les valeurs de m qui répondent à $k = \frac{n}{2}$ sont réelles et égales à $\pm b$; la valeur de $f(u)$, donnée par l'équation (3), contient donc une partie telle que $Ae^{bu} + Be^{-bu}$. Mais la somme de ces deux termes devant vérifier l'équation (2), il faudra qu'on ait

$$Ab^n e^{bu} + Bb^n e^{-bu} = \pm a(Ae^{bh} e^{-bu} + Be^{-bh} e^{bu}),$$

et par conséquent

$$A = \pm Be^{-bh}, \quad B = \pm Ae^{bh}.$$

De ces deux équations qui n'en font qu'une seule, on conclut que la valeur cherchée de $f(u)$ renferme, lorsque n est pair, la partie

$$A\left[e^{bu} \pm e^{b(h-u)}\right].$$

Que n soit pair ou impair, on aura toujours, pour $k = 0$,

$$m = \pm b\sqrt{-1};$$

il en résulte, dans $f(u)$, la partie

$$Ce^{bu\sqrt{-1}} + De^{-bu\sqrt{-1}},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$E\sin(bu + \delta);$$

mais l'équation (2) devant être vérifiée, on aura

$$\mathrm{E}\,b^n \sin\left(bu + \delta + \frac{n\pi}{2}\right) = \pm\, a\mathrm{E}\sin(-bu + bh + \delta),$$

ou bien

$$\cos\left(\delta + \frac{n\pi}{2}\right) = \mp \cos(bh + \delta), \quad \sin\left(\delta + \frac{n\pi}{2}\right) = \pm \sin(bh + \delta),$$

et par suite

$$\delta = -\frac{bh}{2} - \frac{(n - 1 \mp 1)\pi}{4}.$$

La valeur cherchée de $f(u)$ contiendra donc le terme

$$\mathrm{E}\sin\left[bu - \frac{ba}{2} - \frac{(n-1\mp 1)\pi}{4}\right].$$

A chaque valeur de k autre que o ou $\frac{n}{2}$, répondent quatre valeurs de m, savoir :

$$\begin{array}{ll} b(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha), & b(\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha), \\ -b(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha), & -b(\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha), \end{array}$$

en désignant, pour abréger, par α l'angle $\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}$, lequel est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

Aux deux premières de ces valeurs répond, dans $f(u)$, le terme

$$\mathrm{F}e^{bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha + \varepsilon),$$

et aux deux dernières, le terme

$$\mathrm{G}e^{-bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha + \zeta);$$

mais la somme de ces deux expressions doit vérifier l'équation (2), ce qui exige que l'on ait

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}\frac{d^n.e^{bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha+\varepsilon)}{du^n} + \mathrm{G}\frac{d^n.e^{-bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha+\zeta)}{du^n} \\ &= \pm\, a\mathrm{F}e^{b(h-u)\cos\alpha}\sin(-bu\sin\alpha + bh\sin\alpha + \varepsilon) \\ &\quad \pm\, a\mathrm{G}e^{b(u-h)\cos\alpha}\sin(-bu\sin\alpha + bh\sin\alpha + \zeta). \end{aligned}\right.$$

Pour former les dérivées de l'ordre n qui se trouvent dans le premier membre, je différentie n fois de suite par rapport à u l'équation identique

$$e^{bu\cos\alpha}\left[\cos(bu\sin\alpha+\varepsilon)+\sqrt{-1}\sin(bu\sin\alpha+\varepsilon)\right]$$
$$= e^{\varepsilon\sqrt{-1}}\,.\,e^{bu(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)},$$

ce qui donne

$$\frac{d^n.e^{bu\cos\alpha}\left[\cos(bu\sin\alpha+\varepsilon)+\sqrt{-1}\sin(bu\sin\alpha+\varepsilon)\right]}{du^n}$$
$$= b^n e^{\varepsilon\sqrt{-1}}(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)^n e^{bu.(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)};$$

j'égale les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans les deux membres, et je trouve

$$\frac{d^n.e^{bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha+\varepsilon)}{du^n}=b^n e^{bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha+n\alpha+\varepsilon),$$

puis, en changeant b en $-b$, ε en $-\zeta$,

$$\frac{d^n.e^{-bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha+\zeta)}{du^n}=(-1)^n b^n e^{-bu\cos\alpha}\sin(bu\sin\alpha-n\alpha+\zeta).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (5), on verra que pour qu'elle soit vérifiée, il faut que les constantes F, G, ε, ζ remplissent les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}\cos(n\alpha+\varepsilon) &= \mp\,\mathrm{G}e^{-bh\cos\alpha}\cos(bh\sin\alpha+\zeta),\\
\mathrm{F}\sin(n\alpha+\varepsilon) &= \pm\,\mathrm{G}e^{-bh\cos\alpha}\sin(bh\sin\alpha+\zeta),\\
(-1)^n\mathrm{G}\cos(n\alpha-\zeta) &= \mp\,\mathrm{F}e^{bh\cos\alpha}\cos(bh\sin\alpha+\varepsilon),\\
(-1)^n\mathrm{G}\sin(n\alpha-\zeta) &= \mp\,\mathrm{F}e^{bh\cos\alpha}\sin(bh\sin\alpha+\varepsilon),
\end{aligned}$$

et si l'on se rappelle que α désigne l'angle $\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{n}$, on les réduira aisément à ces deux-ci,

$$\zeta=\frac{n\pi}{2}-bh\sin\alpha-\varepsilon,\quad \mathrm{G}=\mp(-1)^{n-k}e^{bh\cos\alpha}\,\mathrm{F}.$$

D'après cela, et en ayant égard à la valeur de α, on trouvera pour la partie de $f(u)$ qui répond à une valeur de k différente de o et de $\frac{n}{2}$, 1°. Si n est pair,

$$F\left\{\begin{array}{c} e^{bu\sin\frac{k\pi}{n}}\sin\left(bu\cos\frac{k\pi}{n}+\varepsilon\right) \\ \pm(-1)^{\frac{n}{2}-k} e^{b(h-u)\sin\frac{k\pi}{n}}\sin\left[b(h-u)\cos\frac{k\pi}{n}+\varepsilon\right] \end{array}\right\};$$

2°. Si n est impair,

$$F\left\{\begin{array}{c} e^{bu\sin\frac{k\pi}{n}}\sin\left(bu\cos\frac{k\pi}{n}+\varepsilon\right) \\ \pm(-1)^{\frac{n-1}{2}-k} e^{b(h-u)\sin\frac{k\pi}{n}}\cos\left[b(h-u)\cos\frac{k\pi}{n}+\varepsilon\right] \end{array}\right\}.$$

Nommons, pour abréger, U_k et V_k ces deux expressions, et, en résumant ce qui précède, nous trouverons que les courbes inversement semblables à leurs $n^{\text{ièmes}}$ développées ont pour équations, lorsque n est pair,

$$(6)\qquad r = A\left[e^{bu} \pm e^{b(h-u)}\right] + E\sin\left[bu - \frac{bh}{2} - \frac{(n-1\mp 1)\pi}{4}\right] + \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{2}-1} U_k,$$

et lorsque n est impair,

$$(7)\qquad r = E\sin\left[bu - \frac{bh}{2} - \frac{(n-1\mp 1)\pi}{4}\right] + \sum_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} V_k.$$

Relativement aux doubles signes, on doit remarquer que dans une même équation il faut prendre partout le signe supérieur, ou partout le signe inférieur.

Il faut maintenant déterminer la valeur de $f(u)$ qui répond à l'équation (1). Or, si nous supposons cette valeur développée en une série de termes de la forme Ae^{mu}, chacun de ces termes en particulier devra vérifier l'équation, et par conséquent, A restant arbitraire, les valeurs de m devront être telles que l'on ait

$$(8)\qquad m^n = \pm\, a e^{mh}.$$

La question est donc ramenée à la détermination des racines réelles ou imaginaires de cette dernière équation. Pour trouver les racines réelles, on la mettra sous la forme

$$m^n e^{-mh} = \pm a,$$

et l'on observera que la dérivée du premier membre, savoir,

$$m^{n-1} e^{-mh}(n - mh),$$

ne peut changer de signe que quand m devient égal à $\frac{n}{h}$ ou à o. On saura donc dans quels intervalles la quantité $m^n e^{-mh}$ augmente ou diminue, lorsqu'on fait croître m de $-\infty$ à $+\infty$, et par conséquent on pourra assigner deux limites entre lesquelles tombe chaque valeur de m qui le rend égal à $\pm a$. Cela fait, on pourra calculer chacune de ces racines par les méthodes connues, avec autant d'approximation qu'on voudra.

On trouvera ainsi que, n étant impair, l'équation

$$m^n = ae^{mh}$$

admet une racine positive si h est négatif ou nul, et qu'elle en admet deux si h est positif et moindre que $\frac{n}{be}$: ces deux racines deviennent égales lorsque h est égal à $\frac{n}{be}$, et, lorsque h est plus grand, l'équation n'a plus de racines réelles.

En supposant n pair, on voit que, pour deux valeurs de h égales et de signes contraires, les racines ont les mêmes valeurs en signes contraires. Lorsque h est positif, il y a toujours une racine négative; de plus, si h est moindre que $\frac{n}{be}$, il y a deux racines positives qui deviennent égales pour $h = \frac{n}{be}$.

Quant à l'équation

$$m^n = -ae^{mh},$$

elle n'a pas de racines réelles si n est pair, et, si n est impair, elle a une racine négative quand h est positif, deux racines négatives quand h est compris entre o et $-\frac{n}{be}$: ces deux racines deviennent égales pour $h = -\frac{n}{be}$, et cessent d'exister lorsque h est moindre que $-\frac{n}{be}$.

Les racines imaginaires de l'équation (8) sont en nombre infini ; mais il sera encore facile de séparer chacune d'elles, et, par suite, de les calculer. Considérons, par exemple, l'équation

$$m^n = a e^{mh},$$

dans laquelle nous supposerons n pair et h positif. Faisons

$$m = z(\cos v \pm \sqrt{-1}\sin v),$$

z étant un nombre positif et v un arc compris entre o et π, il nous viendra

$$z^n(\cos nv \pm \sin nv) = a e^{hz\cos v}\left[\cos(hz\sin v) \pm \sqrt{-1}\sin(hz\sin v)\right],$$

d'où

$$z^n = a e^{hz\cos v}, \quad nv + 2k\pi = hz\sin v,$$

k désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

La dernière équation nous donne

$$z = \frac{nv + 2k\pi}{h\sin v}:$$

substituons dans la précédente cette valeur de z, et nous trouverons

$$\frac{(nv + 2k\pi)^n}{\sin^n v} e^{-\frac{nv + 2k\pi}{\tang v}} = ah^n,$$

équation dont nous représenterons le premier membre par $\varphi(v)$. Nous aurons alors

$$\varphi'(v) = \frac{(nv + 2k\pi)^{n-1}}{\sin^{n+2} v} e^{-\frac{nv + 2k\pi}{\tang v}} \left[n^2\sin^2 v - 2n\sin v.(nv + 2k\pi).\cos v + (nv + 2k\pi)^2\right],$$

expression dont le dernier facteur est essentiellement positif, comme on le voit en le mettant sous les deux formes

$$[n\sin v - (nv + 2k\pi)]^2 + 2n\sin v.(nv + 2k\pi).(1 - \cos v),$$
$$[n\sin v + (nv + 2k\pi)]^2 - 2n\sin v.(nv + 2k\pi).(1 + \cos v).$$

Si l'on attribue au nombre entier k une valeur positive quelconque, ou bien une valeur négative plus grande en valeur absolue que $\frac{n}{2}$, $\varphi'(\nu)$ ne changera pas de signe de $\nu = 0$ à $\nu = \pi$, et comme $\varphi(\nu)$ est nulle pour une de ces limites et infinie pour l'autre, il existera une valeur de ν qui vérifiera l'équation

$$\varphi(\nu) = ah^n.$$

Lorsque le nombre k est compris entre o et $-\frac{n}{2}$, $\varphi'(\nu)$ change de signe pour $\nu = -\frac{2k\pi}{n}$; cette valeur de ν rend $\varphi(\nu)$ égale à o, tandis que cette fonction est infinie pour $\nu = 0$ et $\nu = \pi$; l'équation

$$\varphi(\nu) = ah^n$$

a donc deux racines, l'une entre o et $-\frac{2k\pi}{n}$, l'autre entre $-\frac{2k\pi}{n}$ et π.

Si l'on suppose $k = 0$, $\varphi'(\nu)$ sera toujours positive; mais $\varphi(\nu)$ se réduisant à $n^n e^{-n}$ pour $\nu = 0$, et devenant infinie pour $\nu = \pi$, il existera ou n'existera pas de valeur de ν qui rende $\varphi(\nu)$ égale à ah^n, suivant qu'on aura

$$n^n e^{-n} < \text{ ou } > ah^n, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad h > \text{ ou } < \frac{n}{be};$$

il en sera de même si l'on suppose $k = -\frac{n}{2}$.

La discussion serait toute pareille si n était impair, ou h négatif, ou s'il s'agissait de l'équation

$$m^n = -ae^{mh}.$$

Observons que si h est nul, toutes ces racines imaginaires disparaissent.

Remarquons encore que, pour certaines valeurs de h, il peut y avoir des valeurs imaginaires de m dont la partie réelle soit nulle. En effet, considérons d'abord l'équation

$$m^n = ae^{mh},$$

et faisons

$$m = \pm g\sqrt{-1} = g\left(\cos\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

g désignant un nombre positif; elle deviendra

$$g^n\left(\cos\frac{n\pi}{2}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{n\pi}{2}\right)=a\left(\cos gh\pm\sqrt{-1}\sin gh\right),$$

ou bien

$$g^n=a,\quad gh=\frac{n\pi}{2}+2k\pi.$$

De là

$$g=b,\qquad h=\frac{n\pi}{2b}+\frac{2k\pi}{b}.$$

Ainsi, lorsqu'on aura

$$h=\frac{n\pi}{2b}+\frac{2k\pi}{b},$$

l'équation

$$m^n=ae^{mh}$$

admettra les deux racines $+b\sqrt{-1}$ et $-b\sqrt{-1}$. On verra pareillement que l'équation

$$m^n=-ae^{mh}$$

admettra les deux mêmes racines, si l'on a

$$h=\frac{(n-2)\pi}{2b}+\frac{2k\pi}{b}.$$

Il suit de ce qui précède que la valeur de $f(u)$ ou de r, qui vérifie l'équation (1), renfermera :

1°. Des termes de la forme $Ae^{\alpha u}$ répondant aux racines réelles de l'équation (8) et dont le nombre pourra varier de 0 à 3;

2°. Des termes de la forme $Be^{6u}\sin(\gamma u+\delta)$ dont le nombre est infini et dont chacun répond à deux racines imaginaires conjuguées de l'équation (8).

Dans le cas particulier où cette équation (8) a deux racines égales, deux termes de la forme $Ae^{\alpha u}$ sont remplacés par une expression telle que $e^{\alpha u}(A+Cu)$, et dans un autre cas particulier, où la même équation admet les racines $\pm b\sqrt{-1}$, un des termes de la forme $Be^{6u}\sin(\gamma u+\delta)$ se réduit à $B\sin(bu+\delta)$.

Lorsque h est donné, les constantes désignées dans ces formules par A, B, C, δ sont les seules arbitraires.

Ayant obtenu les valeurs de $f(u)$ qui satisfont aux équations (1) et (2), si l'on veut en coordonnées rectangulaires les équations des courbes correspondantes, on remarquera que, s désignant l'arc d'une de ces courbes, r ou $f(u)$ est égal à $\frac{ds}{du}$, et que, pour des axes convenablement choisis, on a

$$dx = ds \cos u, \qquad dy = ds \sin u.$$

Il en résulte

$$dx = f(u) \cos u \, du, \quad dy = f(u) \sin u \, du,$$

et par suite

$$x = \int f(u) \cos u \, du, \quad y = \int f(u) \sin u \, du.$$

Les intégrations indiquées dans les seconds membres pourront s'effectuer; il restera ensuite à éliminer u entre ces deux équations, ce qui ne paraît pas possible en général.

Examinons maintenant quelques-unes des courbes qui répondent au problème proposé. Celle qui est représentée par l'équation

$$r = \mathrm{A} e^{\alpha u}$$

est à la fois égale et directement semblable à toutes ses développées; car quels que soient n et a, on peut toujours disposer de h de manière que la valeur $m = \alpha$ satisfasse à l'une des équations

$$m^n = a e^{mh}, \quad m^n = - a e^{-mh}.$$

En passant aux coordonnées rectangulaires, on trouvera

$$x - p = \frac{\mathrm{A} e^{\alpha u} (\sin u + \alpha \cos u)}{1 + \alpha^2}, \quad y - q = \frac{\mathrm{A} e^{\alpha u} (\alpha \sin u - \cos u)}{1 + \alpha^2},$$

p et q désignant des constantes arbitraires. Faisons

$$\sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2} = \rho, \quad \frac{y - q}{x - p} = \operatorname{tang} \theta, \quad \frac{1}{a} = \operatorname{tang} \omega;$$

il viendra

$$\rho = \frac{A e^{\alpha u}}{1+\alpha^2} = A\cos\omega . e^{\frac{u}{\tang\omega}},$$

$$\tang\theta = \frac{\tang u - \tang\omega}{1+\tang u \tang\omega} = \tang(u-\omega);$$

et par conséquent

$$\theta = u - \omega, \quad \rho = A\cos\omega . e^{\frac{\theta+\omega}{\tang\omega}},$$

équation d'une spirale logarithmique, dans laquelle le rayon vecteur fait avec la tangente l'angle ω.

L'équation

$$r = B\sin(bu + \delta),$$

que l'on peut toujours ramener à la forme $r = B\sin bu$, représente une courbe semblable directement et inversement à la fois à l'une quelconque de ses développées, et ses dimensions sont à celles de sa $n^{ième}$ développée comme 1 est à b^n.

Si nous prenons d'abord $b = 1$, auquel cas la courbe est égale à ses développées, nous avons

$$dx = B\sin u\cos u\,du, \quad dy = B\sin^2 u\,du,$$

d'où

$$x - p = \frac{B}{4}(1-\cos 2u), \quad y - q = \frac{B}{2}u - \frac{B}{4}\sin 2u.$$

De là

$$y - q = \frac{B}{4}\arc\cos\left[1 - \frac{4(x-p)}{B}\right] - \sqrt{\frac{B}{2}(x-p) - (x-p)^2},$$

équation d'une cycloïde engendrée par un cercle dont le diamètre est $\frac{B}{2}$.

Lorsque b est quelconque, l'équation

$$r = B\sin bu$$

représente une épicycloïde; pour le démontrer, nous rapporterons la courbe aux coordonnées polaires ρ et θ employées tout à l'heure. A cet effet, des équations

$$dx = \mathrm{B} \sin bu \cos u\, du, \quad dy = \mathrm{B} \sin bu \sin u\, du,$$

nous déduirons, en intégrant,

$$x - p = -\frac{\mathrm{B}}{b^2 - 1}(\sin bu \sin u + b \cos bu \cos u),$$

$$y - q = \frac{\mathrm{B}}{b^2 - 1}(\sin bu \cos u - b \cos bu \sin u).$$

Il en résulte

$$\rho^2 = \frac{\mathrm{B}^2}{(b^2-1)^2}(\sin^2 bu + b^2 \cos^2 bu),$$

$$du = \frac{-(b^2-1)^2 \rho\, d\rho}{b\sqrt{[\mathrm{B}^2 b^2 - (b^2-1)^2\rho^2][(b^2-1)^2\rho^2 - \mathrm{B}^2]}}.$$

On a, d'un autre côté,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{b \cos bu \sin u - \sin bu \cos u}{\sin bu \sin u + b \cos bu \cos u} = \frac{\operatorname{tang} u - \dfrac{\operatorname{tang} bu}{b}}{1 + \operatorname{tang} u \dfrac{\operatorname{tang} bu}{b}},$$

et si nous faisons

$$\frac{\operatorname{tang} bu}{b} = \operatorname{tang} u',$$

d'où

$$u' = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tang} bu}{b}\right), \quad du' = \frac{b^2\, du}{\sin^2 bu + b^2 \cos^2 bu} = \frac{\mathrm{B}^2 b^2\, du}{(b^2-1)^2\rho^2},$$

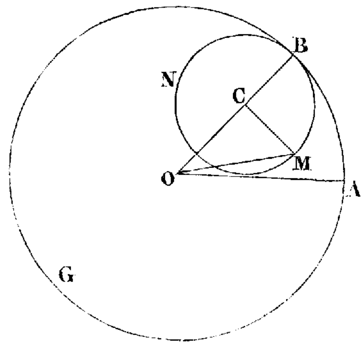
nous aurons

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang} u - \operatorname{tang} u'}{1 + \operatorname{tang} u \operatorname{tang} u'} = \operatorname{tang}(u - u'), \quad \theta = u - u',$$

$$(9) \qquad d\theta = du - du' = -\frac{d\rho}{b\rho}\sqrt{\frac{\mathrm{B}^2 b^2 - (b^2-1)^2\rho^2}{(b^2-1)^2\rho^2 - \mathrm{B}^2}}.$$

Cherchons maintenant l'équation de l'épicycloïde engendrée par le point M de la circonférence BMN pendant qu'elle roule intérieurement sur la circonférence fixe ABG. La droite menée du centre O de celle-ci au centre C de la première passera au point de contact B; la lettre A indique la position du point décrivant, lorsqu'il sert de point de contact aux deux circonférences. Traçons OA, OM, CM, et faisons

$$\mathrm{OA} = \mathrm{A}, \quad \mathrm{CB} = a, \quad \mathrm{OM} = \rho, \quad \mathrm{MOA} = \theta, \quad \mathrm{BCM} = \psi.$$



La figure nous donne

$$\theta = \mathrm{BOA} - \mathrm{COM};$$

de plus, l'arc AB est égal à l'arc MB dont la longueur est $a\psi$; par suite,

$$\mathrm{BOA} = \frac{a\psi}{\mathrm{A}}, \quad \theta = \frac{a\psi}{\mathrm{A}} - \mathrm{COM}.$$

Mais du triangle COM dans lequel l'angle C est le supplément de ψ, on déduit

$$\cos\psi = \frac{\rho^2 - (\mathrm{A}-a)^2 - a^2}{2(\mathrm{A}-a)a}, \quad \cos \mathrm{COM} = \frac{\rho^2 + (\mathrm{A}-a)^2 - a^2}{2(\mathrm{A}-a)\rho};$$

donc

$$\theta = \frac{a}{\mathrm{A}} \arccos \frac{\rho^2 - (\mathrm{A}-a)^2 - a^2}{2(\mathrm{A}-a)a} - \arccos \frac{\rho^2 + (\mathrm{A}-a)^2 - a^2}{2(\mathrm{A}-a)\rho},$$

et, en différentiant,

$$d\theta = -\frac{(\mathrm{A}-2a)d\rho}{\mathrm{A}\rho}\sqrt{\frac{\mathrm{A}^2-\rho^2}{\rho^2-(\mathrm{A}-2a)^2}}.$$

Cette équation conviendra également au cas où la circonférence mobile serait extérieure à l'autre, pourvu qu'alors on y regarde a comme négatif. On voit qu'elle devient identique à l'équation (9), lorsqu'on pose

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{B}b}{b^2-1}, \quad \mathrm{A} - 2a = \frac{\mathrm{B}}{b^2-1}.$$

Ainsi cette équation (9), et par conséquent l'équation $r = \mathrm{B} \sin bu$, représente une épicycloïde qui tourne sa convexité ou sa concavité vers l'origine O selon que le nombre b est supérieur ou inférieur à l'unité, c'est-à-dire selon qu'elle est plus petite ou plus grande que sa développée. Elle nous apprend d'ailleurs que, dans cette courbe, le rayon de courbure est proportionnel au sinus d'un angle qui lui-même est proportionnel à l'angle du rayon de courbure avec une direction fixe. Cette propriété se démontrerait aisément par des considérations géométriques analogues à celles qui servent à établir, dans le livre des *Principes*, la similitude de l'épicycloïde et de sa développée.

Je me borne à mentionner encore deux ou trois courbes assez simples que l'on pourra discuter en formant, comme précédemment, les valeurs de ρ et de tang θ. Par exemple, les courbes représentées par les équations

$$r = \mathrm{A}\left[e^{bu} + e^{b(h-u)}\right], \quad r = \mathrm{A}\left[e^{bu} - e^{b(h-u)}\right],$$

et qui sont semblables à leurs développées d'ordre pair, sont des spirales composées de deux branches symétriques qui s'éloignent à l'infini de part et d'autre d'un rayon vecteur minimum. Dans la première courbe, ce rayon vecteur est perpendiculaire à la tangente à son extrémité; dans la seconde, cette extrémité est un point de rebroussement où la tangente se confond avec le rayon vecteur. On peut ajouter que chacune de ces lignes est semblable à la développée de l'autre.

L'équation

$$r = \mathrm{B} e^{\beta u} \sin \gamma u,$$

par laquelle je termine, représente une courbe semblable à sa développée, et dont les dimensions sont aux dimensions homologues de cette développée comme 1 est à $\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$. Elle présente, de même que l'épicycloïde, une suite de points de rebroussement correspondant à des valeurs de θ qui croissent par degrés égaux à $\frac{\pi}{\gamma}$; mais ces points, au lieu d'être situés sur une même circonférence, sont sur une spirale logarithmique, et la tangente en chacun d'eux, au lieu de se confondre avec le rayon vecteur, fait avec lui un angle constant. D'ailleurs le rayon vecteur de chaque point de rebroussement est maximum ou minimum, suivant que $\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$ est plus grand ou plus petit que 1.

DEUXIÈME PARTIE.

Supposons que l'on développe une courbe quelconque AM à partir d'un point A, de façon que sa développante la rencontre en ce point; puis, qu'on développe cette développante à partir du même point A, et ainsi de suite. Proposons-nous de déterminer la limite des courbes ainsi obtenues.

Soit $r = f(u)$ l'équation de la courbe AM; par le point (r, u) menons-lui une tangente qui sera normale à la première développante et la coupera au point (r_1, u_1); par ce dernier point menons à cette première développante une tangente qui coupe la deuxième au point (r_2, u_2), et ainsi de suite. On aura

$$du = du_1 = du_2 = \ldots = du_n,$$

$$\frac{dr_1}{du} = r, \quad \frac{dr_2}{du} = r_1, \quad \frac{dr_n}{du} = r_{n-1},$$

et par conséquent, en supposant $u = 0$ pour le point A,

$$r_n = \int_0^u \int_0^u \ldots \int_0^u f(u)\, du^n,$$

ou bien, en vertu d'une formule connue,

$$r_n = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \int_0^u (u-z)^{n-1} f(z)\, dz.$$

Je supposerai que $f(u)$ ne devienne pas infinie, même lorsque u augmente jusqu'à l'infini; c'est ce qui a lieu, par exemple, dans une courbe fermée et dépourvue de points d'inflexion. J'admettrai aussi que $f(u)$ ne se réduit pas à zéro pour toutes les valeurs finies de u, comme il arriverait si le point A était l'origine d'une spirale logarithmique.

Cela posé, nommons μ une moyenne entre 0 et u; on aura

$$r_n = \frac{f(\mu)}{1.2.3\ldots(n-1)} \int_0^u (u-z)^{n-1} dz = \frac{u^n}{1.2.3\ldots n} f(\mu).$$

Les valeurs de u qui répondent à des points de la $n^{ième}$ développante doivent donc être telles que $\frac{u^n}{1.2.3\ldots n}$ soit une quantité finie; or, si l'on pose

$$\frac{u^n}{1.2.3\ldots n} = v,$$

et qu'on prenne les logarithmes des deux membres, on trouvera, en appliquant la formule de Stirling,

$$n \log u - n \log n + n - \tfrac{1}{2}\log(2\pi n) - \frac{1}{12n^2} + \text{etc.} = \log v,$$

d'où

$$\log\frac{u}{n} = -1 + \frac{1}{2n}\log(2\pi n) + \frac{1}{12n^3} - \text{etc.} + \frac{\log v}{n}.$$

Si maintenant on fait n infini, v devant rester fini, on aura

$$\log\frac{u}{n} = -1, \quad u = \frac{n}{e};$$

ainsi, quand n devient infini, u doit le devenir aussi, de manière que le rapport $\frac{u}{n}$ soit égal à $\frac{1}{e}$.

Appelons maintenant ε un nombre très-grand, mais fini, et faisons

$$P = \int_0^\varepsilon (u-z)^{n-1} f(z)\,dz, \quad P' = \int_\varepsilon^u (u-z)^{n-1} f(z)\,dz,$$

de sorte qu'on ait

$$\int_0^u (u-z)^{n-1} f(z)\,dz = P + P'.$$

Soient α une moyenne entre o et ε, α' une moyenne entre ε et u; on aura

$$P = f(\alpha)\int_0^\varepsilon (u-z)^{n-1}\,dz = \frac{u^n f(\alpha)}{n}\left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{u}\right)^n\right],$$

$$P' = f(\alpha')\int_\varepsilon^u (u-z)^{n-1}\,dz = \frac{u^n f(\alpha')}{n}\left(1 - \frac{\varepsilon}{u}\right)^n.$$

Mais lorsque n devient infini, u devient égal à $\frac{n}{e}$ et $\left(1 - \frac{\varepsilon}{u}\right)^n$ à $e^{-e\varepsilon}$;

on a donc

$$\mathrm{P} = \frac{u^n f(\alpha)}{n}(1 - e^{-e\varepsilon})(1 + \theta_n), \quad \mathrm{P}' = \frac{u^n f(\alpha')}{n} e^{-e\varepsilon}(1 - \theta'_n),$$

θ_n et θ'_n se réduisant à zéro quand n est infini.

On tire de là

$$\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \frac{f(\alpha')}{f(\alpha)} \times \frac{e^{-e\varepsilon}}{1 - e^{-e\varepsilon}} \times \frac{1+\theta'_n}{1+\theta_n},$$

et l'on voit que ce rapport est très-petit lorsque n est infini, puisque le nombre ε, quoique fini, est très-grand. En l'appelant 6 on aura

$$\int_0^u (u - z)^{n-1} f(z)\,dz = \mathrm{P}(1 + 6) = (1 + 6)\int_0^\varepsilon (u - z)^{n-1} f(z)\,dz.$$

et par conséquent

$$r_n = \frac{1+6}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^\varepsilon (u - z)^{n-1} f(z)\,dz.$$

De même, γ étant aussi très-petit quand n est infini, on aura

$$r_{n-1} = \frac{1+\gamma}{1.2.3\ldots(n-2)}\int_0^\varepsilon (u - z)^{n-2} f(z)\,dz.$$

Divisons cette équation par la précédente, et nous trouverons

$$\frac{r_{n-1}}{r_n}, \quad \text{ou} \quad \frac{dr_n}{r_n\,du} = (n-1)\frac{1+\gamma}{1+6} \times \frac{\int_0^\varepsilon (u-z)^{n-2} f(z)\,dz}{\int_0^\varepsilon (u-z)^{n-1} f(z)\,dz}.$$

Le rapport de deux éléments correspondants des intégrales qui sont dans le second membre est $\frac{1}{u-z}$; celui des intégrales entieres est donc compris entre $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{u-\varepsilon}$, ou bien égal à $\frac{1}{u}(1 + \delta)$, δ se réduisant à zéro quand n est infini. On a, par conséquent,

$$\frac{dr_n}{r_n\,du} = \frac{n-1}{u} \times \frac{(1+\gamma)(1+\delta)}{1+6}.$$

Supposons enfin n infini, δ deviendra égal à o, $\frac{n-1}{u}$ prendra la valeur e, et comme on peut supposer β et γ aussi petits que l'on voudra, il s'ensuit qu'on aura, en remplaçant du par son égal du_n,

$$\frac{dr_n}{r_n\,du_n} = e, \quad \text{d'où} \quad r_n = \mathrm{C}e^{eu_n},$$

équation d'une spirale logarithmique dans laquelle le rayon vecteur fait avec la normale l'angle dont la tangente est e.

Afin de vérifier ce résultat, je vais le retrouver d'une autre manière dans un cas particulier. Je supposerai que, dans la courbe primitive AM, le rayon de courbure soit proportionnel à une puissance moindre que la deuxième de l'arc compté à partir du point A; le cercle répond à la puissance du degré zéro. J'appellerai s, s_1, s_2, etc., les arcs de la courbe AM et de ses développantes compris entre l'origine A et les points qui répondent aux rayons de courbure r, r_1, r_2, etc. : on aura évidemment

$$r_{n+1} = s_n, \quad \frac{ds_{n+1}}{r_{n+1}} = \frac{ds_n}{r_n}.$$

Si donc l'équation de la $n^{ième}$ développante est connue, et que ce soit $r_n = f(s_n)$, on aura pour la suivante

$$ds_{n+1} = \frac{r_n\,dr_{n+1}}{f(r_{n+1})}, \quad s_{n+1} = \int \frac{r_{n+1}\,dr_{n+1}}{f(r_{n+1})}.$$

Cela posé, soit $r = bs^a$ l'équation de la courbe AM; en formant, comme on vient de l'indiquer, les équations des développantes successives, et les résolvant par rapport à r_1, r_2, etc., on trouvera généralement

$$r_n = (2-a)^{\frac{a}{n+1-a}} \times \frac{n+1-a}{[(2-a)(3-a)(4-a)\ldots(n+1-a)]^{\frac{1}{n+1-a}}}\, b^{\frac{1}{n+1-a}}\, s^{\frac{n-a}{n+1-a}}.$$

Si l'on suppose n infini, les quantités

$$(2-a)^{\frac{a}{n+1-a}}, \quad b^{\frac{1}{n+1-a}}, \quad \frac{n-a}{n+1-a},$$

se réduisent à l'unité. Quant au facteur

$$\frac{n+1-a}{[(2-a)(3-a)(4-a)\ldots(n+1-a)]^{\frac{1}{n+1-a}}},$$

si on l'égale à z, on aura

$$\log z = \log(n+1-a)$$
$$-\frac{1}{n+1-a}[\log(2-a)+\log(3-a)+\ldots+\log(n+1-a)],$$

ou, en appliquant une formule connue, et nommant h une constante indépendante de n,

$$\log z = \log(n+1-a)$$
$$-\frac{1}{n+1-a}\begin{bmatrix} h+(n+1-a)\log(n+1-a)-(n+1-a) \\ +\frac{1}{2}\log(n+1-a)+\frac{1}{12(n+1-a)}-\text{etc.}\end{bmatrix}$$
$$= 1-\frac{\log(n+1-a)+h}{2(n+1-a)}-\frac{1}{12(n+1-a)^2}+\text{etc.}$$

Si maintenant on fait $n=\infty$, il viendra

$$\log z = 1, \qquad z = e,$$

et par conséquent

$$r_n = es_n.$$

Telle est l'équation de la limite des développantes; en la différentiant, on trouve

$$dr_n = e\,ds_n = er_n\,du_n, \quad \frac{dr_n}{r_n} = e\,du_n,$$

et par conséquent

$$r_n = Ce^{cu^n},$$

comme plus haut.

Il existe sur les développantes successives un autre théorème énoncé par Jean Bernoulli. Concevons un arc de courbe AB, tel que les tangentes à ses deux extrémités soient perpendiculaires entre elles; développons-le à partir du point B, ce qui nous donnera l'arc BC; développons celui-ci à partir du point C, ce qui nous donnera l'arc CD, et ainsi de suite; les extrémités de ces arcs seront toutes situées sur deux parallèles, savoir, la tangente à l'arc primitif AB au point A, et sa normale au point B. Le théorème dont je parle consiste en ce que la limite des arcs ainsi construits est une demi-cycloïde.

Poisson en a donné une démonstration dans le XVIII^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*; il m'a semblé qu'on la simplifiait beaucoup en la présentant de la manière suivante :

Par un point M de l'arc AB traçons-lui une tangente qui coupe l'arc BC en N; par le point N, menons à ce dernier une tangente qui coupe l'arc CD en P, et ainsi de suite. Soient r, r_1, r_2, etc., les rayons de courbure de ces arcs aux points M, N, P, etc. Soit u l'angle que les rayons de courbure de rang pair font avec la tangente à l'arc AB au point B, et que ceux de rang impair font avec la tangente au même arc au point A. On aura

$$dr_2 = r_1 du, \quad dr_3 = - r_2 du, \quad dr_4 = r_3 du, \quad \text{etc.},$$

les signes des seconds membres étant alternativement + et — ; il en résulte

$$r_2 = \int_0^u r_1 du, \quad r_3 = \int_u^{\frac{\pi}{2}} r_2 du, \quad r_4 = \int_0^u r_3 du, \quad \text{etc.},$$

les limites des intégrations étant alternativement o et u, u et $\frac{\pi}{2}$. Mais r_1 est une fonction de u qui s'annule pour $u = \frac{\pi}{2}$; elle peut donc, de o à u, être exprimée par la formule

$$r_1 = A_1 \cos u + A_3 \cos 3u + A_5 \cos 5u + \text{etc.},$$

en faisant

$$A_i = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\alpha) \cos i\alpha . d\alpha$$

On en conclut

$$r_2 = A_1 \sin u + \frac{A_3}{3} \sin 3u + \frac{A_5}{5} \sin 5u + \text{etc.},$$

$$r_3 = A_1 \cos u + \frac{A_3}{3^2} \cos 3u + \frac{A_5}{5^2} \cos 5u + \text{etc.},$$

et généralement

$$r_n = A_1 \sin u + \frac{A_3}{3^{n-1}} \sin 3u + \frac{A_5}{5^{n-1}} \sin 5u + \text{etc.},$$

si n est un nombre pair, ou bien, si n est impair,

$$r_n = A_1 \cos u + \frac{A_3}{3^{n-1}} \cos 3u + \frac{A_5}{5^{n-1}} \cos 5u + \text{etc.}$$

Supposons maintenant n infini, tous les termes disparaîtront, à l'exception du premier, et nous aurons

$$r_n = A_1 \sin u,$$

ou

$$r_n = A_1 \cos u.$$

La première de ces équations représente, comme on l'a vu plus haut, une cycloïde, et il en est de même de la seconde qui s'en déduit en changeant u en $\frac{\pi}{2} - u$.