JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BRETON

Note sur la détermination de la surface moyenne d'un rectangle dont les côtés peuvent varier entre des limites données

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 373-376.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__373_0>

NOTE

Sur la détermination de la surface moyenne d'un rectangle dont les côtés peuvent varier entre des limites données;

Par M. BRETON (de Champ),

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. Pour l'intelligence de cette Note, nous supposerons tout de suite un cas très-simple, savoir, celui où les deux côtés du rectangle ont pour limites a et b, a étant $> b$. Posons $a - b = n\varepsilon$, n étant un nombre entier arbitraire, que l'on choisira au besoin assez grand pour que ε devienne moindre que toute quantité donnée. Ne considérons, pour un moment, que les rectangles dont la surface est représentée par un produit de la forme $(b + i\varepsilon)(b + i'\varepsilon)$, où i et i' sont des nombres entiers pouvant prendre les valeurs de la série $0, 1, 2, \ldots, n$. Il est aisé de voir qu'on aura tous les produits différents de cette forme en assignant à i' pour chaque valeur de i, celles de la suite $i, i+1, i+2, \ldots, n$, de sorte que leur somme sera donnée par l'expression

$$\mathbf{S}_0^n (b + i\varepsilon) \mathbf{S}_i^n (b + i\varepsilon),$$

où le signe $\mathbf{S}$ a la signification ordinaire que lui attribue le calcul aux différences finies. Quant au nombre de ces produits, il est évidemment donné par la formule $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$. Donc si l'on appelle Ω_ε la moyenne cherchée, c'est-à-dire la somme des surfaces des rectangles divisée par leur nombre, on aura

$$\Omega_\varepsilon = \frac{\mathbf{S}_0^n (b + i\varepsilon) \mathbf{S}_i^n (b + i\varepsilon)}{\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)} = \frac{2 \mathbf{S}_0^n (b + i\varepsilon)\varepsilon \mathbf{S}_i^n (b + i\varepsilon)\varepsilon}{(n\varepsilon)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)}.$$

Attribuons maintenant à ε des valeurs indéfiniment décroissantes correspondant à des valeurs de plus en plus grandes du nombre n, la moyenne Ω_ε deviendra celle de toutes les superficies possibles comprises entre a^2 et b^2. Désignons-la par Ω_0, et posons $i\varepsilon = x$, $\varepsilon = dx$, les sommes indiquées se convertissent en intégrales définies ayant pour limites o, x, $a-b$, correspondant respectivement à o, i, n, et l'on a la nouvelle expression

$$\Omega_0 = \frac{2\int_0^{a-b}(b+x)\,dx\int_x^{(a-b)}(b+x)\,dx}{(a-b)^2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Nota. Il ne faut pas perdre de vue que, dans ces formules, le premier signe de sommation ou d'intégration régit le signe suivant, comme cela a lieu dans le cas de deux variables.

2. Le calcul qui précède est la conséquence de la supposition que chacun des côtés du rectangle peut prendre toutes les valeurs possibles entre les limites a, b. Or, cette supposition peut être restreinte dans sa généralité; tel serait le cas, par exemple, où le plus petit côté du rectangle ne devrait point être inférieur à une fraction déterminée du plus grand. Soit p cette fraction. Après avoir opéré, comme ci-dessus, par voie de dénombrement et de sommation de tous les produits différents, tels que $(b+i\varepsilon)(b+i'\varepsilon)$, puis retranché des résultats obtenus respectivement le nombre et la somme de ceux qui ne satisfont pas à la double inégalité

$$\frac{b+i'\varepsilon}{b+i\varepsilon} - \frac{1}{p} < 0, \quad i < i',$$

le quotient de la division des deux restes donne la moyenne cherchée. On est ainsi conduit à la formule

$$\Omega_p = 2\,\frac{\int_0^{a-b}(b+x)\,dx\int_x^{a-b}(b+x)\,dx - \int_0^{pa-b}(b+x)\,dx\int_{\frac{b+x}{p}-b}^{pa-b}(b+x)\,dx}{\left(\frac{1-p}{p}\right)(pa^2-b^2)}$$

$$= \frac{1}{4}(1+p)\left(a^2+\frac{b^2}{p}\right),$$

où Ω_p est cette moyenne analogue à Ω_0. Elle varie avec la valeur de la fraction p, mais il est évident qu'elle ne saurait en dépendre si l'on a

$$p = \frac{b}{a}, \quad \text{ou} \quad > \frac{b}{a};$$

effectivement on reconnaît qu'en faisant $p = \frac{b}{a}$, Ω_p se réduit à $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

3. Le même procédé serait applicable à toute autre relation exprimée par une ou plusieurs inégalités telles que $\varphi(b + i\varepsilon, b + i'\varepsilon) < 0$, φ étant un signe de fonction. Mais les calculs devenant compliqués et laborieux, je vais exposer un moyen plus simple d'arriver au but.

Soit fait $b + i\varepsilon = x$, $b + i'\varepsilon = y$, et $z = xy$, cette dernière relation pourra être interprétée géométriquement, en regardant x, y et z comme trois coordonnées rectangulaires; alors $z = xy$ représente un paraboloïde hyperbolique, et la moyenne cherchée porte sur un certain nombre de valeurs de z tant que ε conserve une valeur finie. De plus, on se convaincra sans peine, avec un peu d'attention, que chacune de ces ordonnées peut être considérée comme l'axe ou plutôt l'un des côtés d'un prisme carré ayant ε pour côté de la base. Or, à cause de la petitesse de ε, le volume de chacun de ces prismes est proportionnel à la valeur de z qui lui correspond comme axe ou comme côté; donc la moyenne cherchée n'est autre chose que la somme des volumes des prismes divisée par la somme des bases Celles-ci, d'ailleurs, forment évidemment la surface terminée sur le plan des xy par un contour polygonal composé de lignes droites ou courbes représentées par les équations telles que $\varphi(x, y) = 0$, servant de limites aux inégalités $\varphi(x, y) < 0$. De là l'expression analytique très-simple de la moyenne Ω,

$$\Omega = \frac{\iint z\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\iint xy\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}.$$

4. Il est nécessaire, dans quelques applications relatives à l'art de l'ingénieur et en vue desquelles ces recherches ont été faites, de considérer chaque rectangle comme entouré d'une bande de largeur uniforme j que l'on appelle un *joint*. D'après ce qui vient d'être dit, on tiendra compte du joint en le regardant comme compris dans les longueurs

x, y, c'est-à-dire en supposant que chaque rectangle s'étend jusqu'à l'axe du *joint* qui l'entoure. Dans ce cas, il faudra remplacer chaque équation *limite* $\varphi(x, y) = 0$ par $\varphi(x - j, y - j) = 0$.

Toutefois, on peut ne pas changer ces équations, et rectifier seulement la valeur de Ω où x et y deviendront respectivement $x+j$, $y+j$, ce qui donne

$$\Omega = \frac{\iint (x+j)(y+j)\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} = \frac{\iint xy\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} + j\frac{\iint (x+y)\,dx\,dy}{\iint dx\,dy} + j^2,$$

les deux derniers termes formant la portion de Ω due à l'influence du *joint* seul.

5. Les deux premiers termes de la valeur ci-dessus de Ω sont susceptibles d'interprétations assez remarquables.

En premier lieu, le coefficient de j n'est autre chose que le double de la distance du centre de gravité de la figure à laquelle s'applique l'intégrale $\iint dx\,dy$, à chacun des axes.

En second lieu, il n'est pas difficile de reconnaître, dans l'expression $\frac{\iint xy\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}$, la distance du centre de pression de la même figure à l'un des axes multipliée par la distance de son centre de gravité à l'autre axe, ce dernier marquant le niveau d'un liquide pesant dans lequel elle serait plongée.