JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ABEL TRANSON

Sur la détermination des orbites planétaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 369-372.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__369_0>

SUR LA DÉTERMINATION DES ORBITES PLANÉTAIRES;

PAR M. ABEL TRANSON.

Soient, à l'origine du mouvement, l la distance de la planète au soleil, V la vitesse et θ l'angle que fait cette vitesse avec le rayon vecteur.

Je vais montrer qu'on peut, à l'aide de ces circonstances initiales, et sans avoir recours à l'équation générale du mouvement, déterminer la forme et la situation de l'orbite.

C'est-à-dire, il s'agira de déterminer : 1° le paramètre ou rayon de courbure au sommet du grand axe, $p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$; 2° l'excentricité e; 3° l'angle ω que fait le grand axe de l'orbite avec le rayon vecteur.

1°. Soient $A = a(1 \mp e)$ la distance relative à l'une ou l'autre des absides, et U la vitesse correspondante. Le *principe des aires* donne la relation

$$AU = Vl \sin \theta.$$

En même temps, parce que la force centrifuge aux absides est exactement égale à la force centrale, on a

$$A^2 U^2 = p.\mu,$$

d'où l'on tire immédiatement, pour la valeur du paramètre,

$$p = \frac{V^2 l^2 \sin^2 \theta}{\mu}.$$

On pourrait dire aussi qu'au lieu initial de la planète la force centrale décomposée normalement à la courbe est égale à la force centrifuge, ce qui donnerait

$$\frac{\mu}{l^2} \sin \theta = \frac{V^2}{\rho},$$

en appelant ρ le rayon de courbure au lieu initial; et si l'on a égard à la relation

$$p = \rho \sin^3 \theta,$$

on retrouve l'expression ci-dessus.

2°. Pour obtenir une seconde équation, il faut avoir recours au *principe des forces vives*. La vitesse U relative à la distance A de l'abside ne dépend que de cette distance et non de la forme intermédiaire de l'orbite. C'est-à-dire, par exemple, que cette vitesse serait la même à la même distance A si l'angle initial θ avait été nul, c'est-à-dire si la planète avait été mue directement dans le sens du soleil. En un mot, l'équation de la force vive étant

$$d.v^2 = -\frac{2\mu\, dr}{r^2},$$

on en tire

$$(\alpha) \qquad v^2 - V^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right).$$

Et aux absides en particulier,

$$U^2 - V^2 = 2\mu\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{l}\right).$$

Si l'on multiplie cette équation par A^2, et si l'on a égard à la valeur ci-dessus de $A^2 U^2$, il vient

$$(\beta) \qquad A^2\left(V^2 - \frac{2\mu}{l}\right) + 2\mu A = p\mu,$$

d'où l'on tire pour A une double valeur (à cause des deux absides) représentée par

$$A = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + p\mu\left(V^2 - \frac{2\mu}{l}\right)}}{v^2 - \frac{2\mu}{e}};$$

d'ailleurs, en tirant de (β) la valeur de

$$\frac{p}{A} = 2 + \frac{A}{\mu}\left(V^2 - \frac{2\mu}{l}\right),$$

et ayant égard à ce que

$$\frac{p}{A} = 1 \pm e,$$

il vient

$$e = \sqrt{1 + \frac{p}{\mu}\left(V^2 - \frac{2\mu}{e}\right)} = \sqrt{1 + V^2 l^2 \sin^2\theta\left(V^2 - \frac{2\mu}{l}\right)}.$$

De là toutes les conséquences connues. Si la force est répulsive, il faut changer dans la formule ci-dessus le signe de μ; la trajectoire est donc alors une hyperbole, ou plus exactement une branche d'hyperbole tournant sa convexité vers le centre d'action. Si, au contraire, la force est attractive, la trajectoire peut être l'une des trois coniques, et cela ne dépend pas de la direction initiale, mais uniquement du signe de $V^2 - \frac{2\mu}{l}$, ou bien du signe de $V^2 - u^2$, en appelant u la vitesse que le mobile aurait acquise en tombant vers le centre d'action, depuis l'infini jusqu'à la distance l avec une vitesse initiale nulle. Enfin, comme le demi-grand axe est égal à $\frac{p}{1-e^2}$, on trouve pour sa valeur

$$a = \frac{\mu}{\frac{2\mu}{l} - V^2}$$

laquelle ne dépend pas non plus de la valeur initiale de l'angle θ.

Quant à l'angle ω qui détermine la situation du grand axe, maintenant qu'on a la forme particulière de l'orbite, c'est une question à résoudre par la géométrie des sections coniques.

Si l'on réunit aux considérations précédentes l'emploi de la méthode élémentaire et purement géométrique pour la détermination de la nature des orbites, qui a été présentée dans ce même Journal (tome Ier, page 191) [*], on voit qu'on peut dégager en quelque sorte de tout

---

[*] Depuis cette époque, j'ai reconnu que la valeur du rayon de courbure des sections coniques, que j'avais donnée dans cette Note, aussi bien que son usage pour déterminer la loi de la force centrale, était consignée dans le commentaire des PP. Leseur et Jacquier, de l'ordre des Minimes, sur le livre de Newton.

calcul la question des planètes et n'y laisser en saillie que l'application des principes fondamentaux de la dynamique d'un point matériel.

J'ajoute en terminant que, si à chaque point M de l'orbite on cherche sur le rayon vecteur le point N d'où la planète aurait dû tomber vers le soleil pour, en partant d'une vitesse initiale nulle, acquérir, en arrivant à l'orbite, la vitesse qu'elle y possède, on trouvera que le lieu des points N est le cercle décrit du foyer d'attraction comme centre avec un rayon égal au grand axe $2a$; résultat qui donne ainsi, en mécanique, une signification intéressante à ce cercle qui déjà, en géométrie, est doué, par rapport à la conique, de propriétés si nombreuses [*].

[*] Dans la dernière édition de son excellent *Traité de Géométrie*, M. le professeur Vincent annonce qu'il fait, dans son enseignement, un très-grand emploi de la considération de ce cercle, et qu'il lui a attribué depuis très-longtemps la dénomination parfaitement appropriée de *cercle directeur*.