JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HERMITE

Sur la théorie des transcendantes à différentielles algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 353-368.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__353_0>

SUR LA THÉORIE DES TRANSCENDANTES

A DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES;

PAR M. HERMITE.

(Extrait d'une Lettre à M. LIOUVILLE. — *Comptes rendus*, tome XVIII.)

J'ai essayé d'introduire, dans l'analyse des transcendantes à différentielles algébriques quelconques, des fonctions inverses de plusieurs variables, à l'exemple de ce qui a été fait par M. Jacobi pour les fonctions abéliennes. Je vais passer rapidement en revue les principaux résultats que j'ai obtenus, en réservant les démonstrations et les développements accessoires pour un Mémoire que j'espère bientôt avoir l'honneur de présenter à l'Académie.

I.

En suivant la marche tracée par M. Jacobi, dans le célèbre Mémoire intitulé : *Considerationes generales de transcendentibus Abelianis*, j'ai été conduit d'abord à rechercher le système d'équations différentielles ordinaires dont les intégrales complètes sont données par le théorème d'Abel, considéré dans toute son étendue. Cette recherche, au reste, était assez facile en s'aidant des résultats consignés par Abel lui-même dans le Mémoire couronné par l'Académie des Sciences [*].

Soit, en suivant les notations d'Abel,

$$\chi(y) = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + \ldots + p_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0$$

[*] Tome VII des *Savants étrangers*. Voyez aussi un élégant Mémoire de M. Minding, publié dans le Journal de M. Crelle, tome XXIII.

une équation algébrique quelconque irréductible, dont tous les coefficients sont des fonctions rationnelles et entières d'une même variable x.

Nommons ses racines

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \ldots, \quad y_n,$$

et désignons par

$$(1) \qquad f(x, y) = t_0 + t_1 y + t_2 y^2 + \ldots + t_{n-2} y^{n-2}$$

une fonction rationnelle et entière de x et y, dans laquelle le degré d'un coefficient quelconque t_m soit pris égal au nombre entier immédiatement inférieur à la somme, diminuée d'une unité, des $n - m - 1$ plus grands exposants des développements de chaque racine y suivant les puissances descendantes de x.

Soit enfin γ le nombre des coefficients arbitraires contenus dans $f(x, y)$; cette fonction sera susceptible d'un nombre γ de formes différentes que je représenterai par

$$f_1(x, y), \quad f_2(x, y), \ldots, \quad f_\gamma(x, y).$$

Cela posé, en désignant par

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_\mu$$

des variables en nombre quelconque μ plus grand que γ, et par

$$y_{(1)}, \quad y_{(2)}, \ldots, \quad y_{(\mu)}$$

des fonctions irrationnelles choisies arbitrairement parmi les n racines

$$y_1, \quad y_2, \ldots, \quad y_n,$$

on aura, au moyen du théorème d'Abel, sous forme algébrique, les intégrales complètes du système des équations

$$\begin{array}{l}
\dfrac{f_1(x_1, y_{(1)})}{\chi'(y_{(1)})} dx_1 + \dfrac{f_1(x_2, y_{(2)})}{\chi'(y_{(2)})} dx_2 + \ldots + \dfrac{f_1(x_\mu, y_{(\mu)})}{\chi'(y_{(\mu)})} dx_\mu = 0, \\
\dfrac{f_2(x_1, y_{(1)})}{\chi'(y_{(1)})} dx_1 + \dfrac{f_2(x_2, y_{(2)})}{\chi'(y_{(2)})} dx_2 + \ldots + \dfrac{f_2(x_\mu, y_{(\mu)})}{\chi'(y_{(\mu)})} dx_\mu = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{f_\gamma(x_1, y_{(1)})}{\chi'(y_{(1)})} dx_1 + \dfrac{f_\gamma(x_2, y_{(2)})}{\chi'(y_{(2)})} dx_2 + \ldots + \dfrac{f_\gamma(x_\mu, y_{(\mu)})}{\chi'(y_{(\mu)})} dx_\mu = 0.
\end{array}$$

Il est inutile de dire que, dans chacune des racines $y_{(1)}$ ou $y_{(2)}$, etc., on remplace la quantité x par la variable x_1 ou x_2, etc., du terme où elle entre.

II.

D'après cela, je prendrai pour fonctions inverses les quantités

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_\gamma,$$

définies par les γ équations suivantes

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\gamma} \int_0^{x_k} \frac{f_1(x_k, y_{(k)})}{\chi'(y_{(k)})}\, dx_k = u_1, & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\gamma} \int_0^{x_k} \frac{f_2(x_k, y_{(k)})}{\chi'(y_{(k)})}\, dx_k = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \displaystyle\sum_{k=1}^{k=\gamma} \int_0^{x_k} \frac{f_\gamma(x_k, y_{(k)})}{\chi'(y_{(k)})}\, dx_k = u_\gamma; \end{array} \right.$$

et je poserai, en conséquence,

$$x_1 = \lambda_1(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma), \quad x_2 = \lambda_2(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma), \quad x_\gamma = \lambda_\gamma(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma).$$

Cela étant, les intégrales du système d'équations différentielles considéré plus haut, intégrales fournies immédiatement par le théorème d'Abel, donnent sans difficulté, par un changement convenable de constantes, le théorème fondamental, qui consiste en ce que les γ fonctions

$$\lambda_k(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_\gamma + v_\gamma)$$

sont les racines d'une équation de degré γ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des diverses fonctions

$$\lambda_k(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma),$$
$$\lambda_k(v_1, v_2, \ldots, v_\gamma),$$

et des valeurs correspondantes de celles des racines y que l'on a fait entrer dans les équations (2).

III.

De là découle cette propriété importante des fonctions inverses, qui consiste dans la coexistence d'une série d'indices de périodicité pour tous les arguments, et qui montre toute l'étendue de ce caractère singulier, dont un admirable Mémoire de M. Jacobi a révélé depuis longtemps l'existence dans les fonctions abéliennes. Considérons l'équation

$$\chi'(y_1)\,\chi'(y_2)\,\chi'(y_3)\cdots\chi'(y_n)=0,$$

dont le premier membre, comme on sait, s'exprime par une fonction entière de x. Chacune de ses racines jouit de la propriété de rendre égales deux des racines y de l'équation

$$\chi(y)=0.$$

Supposons donc que $y_{(1)}$ devienne égale à une autre racine $y_{[1]}$ pour les diverses valeurs

$$x=\alpha'_1,\ \alpha''_1,\ \alpha'''_1,\ldots,\ \alpha_1^{(n_1)};$$

de même que

$$y_{(2)}=y_{[2]}$$

pour

$$x=\alpha'_2,\ \alpha''_2,\ \alpha'''_2,\ldots,\ \alpha_2^{(n_2)},$$

et

$$y_{(3)}=y_{[3]}$$

pour

$$x=\alpha'_3,\ \alpha''_3,\ \alpha'''_3,\ldots,\ \alpha_3^{(n_3)},$$

et ainsi de suite.

Faisons, pour abréger l'écriture,

$$\begin{gathered}
\frac{f_k(x,\ y_{(1)})}{\chi'(y_{(1)})}-\frac{f_k(x,\ y_{[1]})}{\chi'(y_{[1]})}=(k,\ 1),\\
\frac{f_k(x,\ y_{(2)})}{\chi'(y_{(2)})}-\frac{f_k(x,\ y_{[2]})}{\chi'(y_{[2]})}=(k,\ 2),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{f_k(x,\ y_{(\gamma)})}{\chi'(y_{(\gamma)})}-\frac{f_k(x,\ y_{[\gamma]})}{\chi'(y_{[\gamma]})}=(k,\ \gamma);
\end{gathered}$$

et désignons par les lettres m des nombres entiers positifs ou négatifs. Si l'on pose

$$\mathrm{I}_k = \sum_{n=1}^{n=n_1-1} m_1^{(n)} \int_{\alpha_1^{(n)}}^{\alpha_1^{(n+1)}} (k, 1)\, dx + \sum_{n=1}^{n=n_2-1} m_2^{(n)} \int_{\alpha_2^{(n)}}^{\alpha_2^{(n+1)}} (k, 2)\, dx + \ldots$$
$$\ldots\ldots + \sum_{n=1}^{n=n_\gamma-1} m_\gamma^{(n)} \int_{\alpha_\gamma^{(n)}}^{\alpha_\gamma^{(n+1)}} (k, \gamma)\, dx,$$

on aura ce théorème :

« Une fonction rationnelle et symétrique quelconque des γ fonctions » inverses conservera la même valeur en ajoutant simultanément aux » divers arguments

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_\gamma$$

» les quantités constantes

$$\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots, \mathrm{I}_\gamma. \text{ »}$$

Par une autre méthode, indépendante du théorème sur l'addition des arguments, mais qu'il serait trop long d'indiquer ici, on obtient directement les égalités

$$\begin{aligned}
\lambda_1(u_1 + \mathrm{I}_1, u_2 + \mathrm{I}_2, \ldots, u_\gamma + \mathrm{I}_\gamma) &= \lambda_1(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma),\\
\lambda_2(u_1 + \mathrm{I}_1, u_2 + \mathrm{I}_2, \ldots, u_\gamma + \mathrm{I}_\gamma) &= \lambda_2(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda_\gamma(u_1 + \mathrm{I}_1, u_2 + \mathrm{I}_2, \ldots, u_\gamma + \mathrm{I}_\gamma) &= \lambda_\gamma(u_1, u_2, \ldots, u_\gamma).
\end{aligned}$$

IV.

Les racines de l'équation

$$\chi'(y_1)\,\chi'(y_2)\cdots\chi'(y_n) = 0,$$

qui se sont présentées comme limites des intégrales qui entrent dans l'expression des indices de périodicité, jouissent de la propriété générale d'être des valeurs maxima ou minima des fonctions inverses. Cela résulte des expressions de leurs différences partielles que je vais rapporter.

Soit

$$(3)\qquad F(x,y) = \mu_1 f_1(x,y) + \mu_2 f_2(x,y) + \ldots + \mu_\gamma f_\gamma(x,y);$$

concevons qu'on détermine les constantes μ par les $\gamma - 1$ conditions

$$F(x_2, y_{(2)}) = 0,\quad F(x_3, y_{(3)}) = 0, \ldots,\quad F(x_\gamma, y_{(\gamma)}) = 0.$$

Nommons $F_1(x, y)$ ce que devient alors l'expression (3); les équations (2) donneront sans peine

$$\frac{dx_1}{du_1} = \frac{\mu_1 \chi'(y_{(1)})}{F_1(x_1, y_{(1)})},\quad \frac{dx_1}{du_2} = \frac{\mu_2 \chi'(y_{(1)})}{F_1(x_1, y_{(1)})}, \ldots,\quad \frac{dx_1}{du_\gamma} = \frac{\mu_\gamma \chi'(y_{(1)})}{F_1(x_1, y_{(1)})}.$$

De même, si l'on appelle $F_2(x, y)$ la fonction $F(x, y)$ déterminée par les conditions

$$F(x_1, y_{(1)}) = 0,\quad F(x_3, y_{(3)}) = 0, \ldots,\quad F(x_\gamma, y_{(\gamma)}) = 0,$$

on aura

$$\frac{dx_2}{du_1} = \frac{\mu_1 \chi'(y_{(2)})}{F_2(x_2, y_{(2)})},\quad \frac{dx_2}{du_2} = \frac{\mu_2 \chi'(y_{(2)})}{F_2(x_2, y_{(2)})}, \ldots,\quad \frac{dx_2}{du_\gamma} = \frac{\mu_\gamma \chi'(y_{(2)})}{F_2(x_2, y_{(2)})},$$

et ainsi de suite; d'où résulte la proposition énoncée.

De ce qui précède, on tire des équations linéaires aux différences partielles qui méritent d'être indiquées, savoir :

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, y_{(1)}) \frac{dx_1}{du_1} + f_2(x_1, y_{(1)}) \frac{dx_1}{du_2} + \ldots + f_\gamma(x_1, y_{(1)}) \frac{dx_1}{du_\gamma} = \chi'(y_{(1)}),\\
&f_1(x_2, y_{(2)}) \frac{dx_2}{du_1} + f_2(x_2, y_{(2)}) \frac{dx_2}{du_2} + \ldots + f_\gamma(x_2, y_{(2)}) \frac{dx_2}{du_\gamma} = \chi'(y_{(2)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_1(x_\gamma, y_{(\gamma)}) \frac{dx_\gamma}{du_1} + f_2(x_\gamma, y_{(\gamma)}) \frac{dx_\gamma}{du_2} + \ldots + f_\gamma(x_\gamma, y_{(\gamma)}) \frac{dx_\gamma}{du_\gamma} = \chi'(y_{(\gamma)}).
\end{aligned}$$

Remarquons enfin cette conséquence, que l'équation

$$f_1(x,y) \frac{dx_1}{du_1} + f_2(x,y) \frac{dx_1}{du_2} + \ldots + f_\gamma(x,y) \frac{dx_1}{du_\gamma} = 0$$

étant satisfaite par

$$\begin{aligned} x &= x_2, \quad y = y_{(2)},\\ x &= x_3, \quad y = y_{(3)},\\ &\ldots\ldots\ldots\\ x &= x_\gamma, \quad y = y_{(\gamma)}, \end{aligned}$$

on peut, au moyen des différences partielles de l'une des fonctions inverses, déterminer algébriquement les $\gamma - 1$ autres.

V.

Le théorème relatif à l'addition des arguments conduit encore à exprimer les fonctions inverses dans toute leur généralité, au moyen des cas particuliers les plus simples, où l'on ne suppose successivement qu'un argument variable, les autres étant égaux à des constantes quelconques, à zéro par exemple.

Ce genre de réduction, qui est dû à M. Jacobi, se retrouve dans une autre partie de la théorie, comme on va le voir.

En nous bornant, pour plus de simplicité, aux fonctions de la première classe des transcendantes abéliennes, considérons la différentielle totale

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{\sqrt{f(x)}}dx + \frac{\mathrm{F}(y)}{\sqrt{f(y)}}dy,$$

où $\mathrm{F}(x)$ est une fonction rationnelle quelconque, et $f(x)$ un polynôme du cinquième ou du sixième degré. Si l'on substitue aux variables x et y les variables u et v des fonctions inverses définies par les équations

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = u,$$
$$\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_0^y \frac{y\,dy}{\sqrt{f(y)}} = v,$$

son intégrale étant désignée par

$$\Pi(u, v),$$

jouira, en vertu du théorème d'Abel, de la propriété exprimée par l'égalité

$$\Pi(u+u', v+v') = \Pi(u, v) + \Pi(u', v') + \text{une fonction algébrique et logarithmique};$$

en faisant

$$u = 0, \quad v' = 0,$$

on trouve

$$\Pi(u', v) = \Pi(0, v) + \Pi(u', 0) + \text{une fonct. algébr. et logarithm.}$$

Ainsi, la fonction $\Pi(u, v)$ à double argument est ramenée aux deux cas les plus simples, où l'on suppose successivement un seul argument variable; on voit encore qu'on n'aura plus à considérer que des intégrales de formules différentielles qui contiennent seulement une variable indépendante, à savoir, des intégrales, par rapport à u, de fonctions rationnelles et symétriques de

$$\lambda_1(u, 0), \quad \lambda_2(u, 0),$$

et des intégrales, par rapport à v, de fonctions rationnelles et symétriques de

$$\lambda_1(0, v), \quad \lambda_2(0, v).$$

On se convaincra facilement de la généralité des considérations précédentes : ainsi, dans le cas des fonctions de la seconde classe des transcendantes abéliennes, où s'offrent des fonctions à triple argument

$$\Pi(u, v, w),$$

on aura de même l'égalité

$$\Pi(u+u', v+v', w+w') = \Pi(u, v, w) + \Pi(u', v', w') + \text{une fonction algébrique et logarithmique},$$

ou bien encore la suivante

$$\Pi(u+u'+u'', v+v'+v'', w+w'+w'') = \Pi(u, v, w) + \Pi(u', v', w') + \Pi(u'', v'', w'') + \text{une fonct. algébr. et log.};$$

et, en faisant

$$\begin{aligned} u &= 0, & v &= 0, \\ u' &= 0, & w' &= 0, \\ v'' &= 0, & w'' &= 0, \end{aligned}$$

il vient

$$\Pi(u'', v', w) = \Pi(0, 0, w) + \Pi(0, v', 0)$$
$$+ \Pi(u'', 0, 0) + \text{une fonction algébr. et logarith.,}$$

ce qui conduit aux mêmes conséquences que précédemment.

VI.

La méthode qui m'a donné la division des arguments dans les fonctions abéliennes, s'étend aux nouvelles transcendantes; mais, jusqu'à présent, je n'ai pu aborder la théorie de la transformation sans être arrêté par les plus grandes difficultés. Mes tentatives m'ont conduit, néanmoins, à quelques considérations sur cette théorie bornée aux fonctions elliptiques; je vais les rapporter en peu de mots.

Soient $\varphi(u, k)$, ou simplement $\varphi(u)$, la fonction inverse, définie par l'égalité

$$\varphi'(u) = \sqrt{[1 - \varphi^2(u)][1 - k^2\varphi^2(u)]} = \Delta(u, k),$$

2ω et $2\varpi\sqrt{-1}$ les indices de périodicité, et n un nombre impair quelconque. Le théorème fondamental, donné pour la première fois par M. Jacobi, consiste en ce que la fonction

$$z = \sum \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) = \varphi(u) + \varphi\left(u + \frac{2\omega}{n}\right) + \ldots + \varphi\left(u + \frac{2(n-1)\omega}{n}\right),$$

où l'une des périodes des fonctions elliptiques se trouve divisée par le nombre n, peut être représentée de la manière suivante :

$$\alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right),$$

λ désignant un nouveau module, a et α des constantes. On en déduit ensuite que toute fonction rationnelle et symétrique des quantités

$$\varphi(u), \quad \varphi\left(u + \frac{2\omega}{n}\right), \quad \varphi\left(u + \frac{4\omega}{n}\right), \ldots, \quad \varphi\left(u + \frac{2(n-1)\omega}{n}\right),$$

où, de même, l'une des périodes des fonctions elliptiques subsiste, tandis que l'autre se trouve divisée par le nombre n, peut être représentée par une fonction rationnelle de $\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)$. Or, voici la démonstration du théorème de M. Jacobi, à laquelle je me suis trouvé conduit.

Il existe, entre $\frac{dz}{du}$ et z, une relation algébrique, qui s'obtiendra par l'élimination de $\varphi(u)$ entre les deux égalités

$$z = \sum \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right), \quad \frac{dz}{du} = \sum \Delta\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right).$$

Soit, pour cela, $\varphi(u) = x$; z, comme on le voit aisément, se transforme en une fonction rationnelle $\frac{x\mathrm{U}}{\mathrm{V}}$, U et V étant deux polynômes pairs du degré $n - 1$; on établit ensuite sans peine que les racines de l'équation

$$(4) \qquad z = \sum \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)$$

sont de la forme

$$\varphi(u) = \varphi(\varepsilon), \quad \varphi\left(\varepsilon + \frac{2\omega}{n}\right), \quad \varphi\left(\varepsilon + \frac{4\omega}{n}\right), \ldots, \quad \varphi\left(\varepsilon + \frac{2(n-1)\omega}{n}\right).$$

Cela résulte, en effet, de ce que l'expression de z ne change point en augmentant u d'un multiple quelconque de $\frac{2\omega}{n}$.

Or, la même chose a lieu nécessairement dans la dérivée $\frac{dz}{du}$; et comme

$$z = \frac{x\mathrm{U}}{n},$$

on a

$$\frac{dz}{du} = \frac{\mathrm{V}\frac{d(x\mathrm{U})}{dx} - x\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dx}}{\mathrm{V}^2}\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}.$$

Ainsi, le carré de $\frac{dz}{du}$, qui est une fonction rationnelle de x, conservera la même valeur en y substituant successivement les diverses racines de l'équation (4); par suite, $\frac{dz}{du}$ s'exprimera par la racine carrée d'une fonction rationnelle de z.

Or, cette fonction sera entière, car

$$\sum \Delta\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)$$

ne peut devenir infini sans que quelqu'une des quantités $\varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)$

ne le soit, ce qui rend dès lors z infini lui-même. Pour obtenir maintenant le nombre et la nature des valeurs de z qui donnent

$$\frac{dz}{du} = 0,$$

il faut chercher les racines de l'équation

$$\sum \Delta\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) = 0.$$

On trouve très-facilement qu'elles sont comprises dans les deux formules

$$x^2 = \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2p\omega}{n}\right), \quad x^2 = \varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}\sqrt{-1} + \frac{2p\omega}{n}\right).$$

p devant être supposé successivement $0, 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Mais j'observe que pour les substituer dans l'expression de z, il est inutile d'avoir égard à ces diverses valeurs de p, de sorte qu'il reste seulement à considérer les racines

$$x^2 = \varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad x^2 = \varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}\sqrt{-1}\right).$$

On voit, par là, que le polynôme en z, qui entre dans l'expression de $\frac{dz}{du}$, sera du quatrième degré, ne contiendra que des puissances paires de z, et s'évanouira pour les valeurs

$$z^2 = \left\{\sum \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2p\omega}{n}\right)\right\}^2 = \alpha^2, \quad z^2 = \left\{\sum \varphi\left(\frac{\varpi}{2}\sqrt{-1} + \frac{2p\omega}{n}\right)\right\}^2 = \beta^2.$$

Ainsi, l'on aura

$$\frac{dz}{du} = C\sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{\beta^2}\right)},$$

C étant une constante qu'on détermine en observant que, pour $u = 0$ et par suite $z = 0$, on a

$$\frac{dz}{du} = C = \sum \Delta\left(\frac{2p\omega}{n}\right):$$

faisant donc

$$\frac{\alpha}{6} = \lambda, \quad \frac{C}{\alpha} = a,$$

on a

$$z = \alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right).$$

VII.

Il résulte, de ce qui précède, que l'équation

$$\alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) = \frac{x\mathrm{U}}{\mathrm{V}}, \quad \text{ou} \quad x\mathrm{U} - \alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)\mathrm{V} = 0,$$

a pour racines les n quantités

$$\varphi(u), \quad \varphi\left(u + \frac{2\omega}{n}\right), \ldots, \quad \varphi\left(u + \frac{2(n-1)\omega}{n}\right).$$

Je vais faire voir qu'on peut tirer de là, directement, la transformation des fonctions de troisième espèce, sans établir préalablement, comme le fait M. Jacobi, la formule de transformation des fonctions de seconde espèce.

Soit, pour abréger,

$$\mathrm{F}(x) = x\mathrm{U} - \alpha\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)\mathrm{V};$$

en désignant par m une quantité quelconque, on aura, comme l'on sait,

$$\frac{\mathrm{F}'(m)}{\mathrm{F}(m)} = \sum \frac{1}{m - \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)},$$

ou bien encore

$$\frac{\mathrm{F}'(m)}{\mathrm{F}(m)} = \frac{1}{m - \varphi(u)} + \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{1}{m - \varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right)} + \frac{1}{m - \varphi\left(u - \frac{2p\omega}{n}\right)}\right].$$

Or, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{F}'(m)}{\mathrm{F}(m)} = \frac{\mathrm{A}\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) - \mathrm{B}}{\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) - \mathrm{M}},$$

en posant

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}, \quad \mathrm{B} = \frac{(x\mathrm{U})'}{\alpha\mathrm{V}}, \quad \mathrm{M} = \frac{x\mathrm{U}}{\alpha\mathrm{V}} \quad \text{pour} \quad x = m.$$

Il importe beaucoup de remarquer cette valeur de M qui, pour $m = \varphi(\mu, k)$, devient $\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)$; ainsi on a l'égalité

$$\frac{\mathrm{A}\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) + \mathrm{B}}{\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right) - \varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)} = \frac{1}{\varphi(u) - \varphi(\mu)} + \sum \left[\frac{1}{\varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) - \varphi(\mu)} + \frac{1}{\varphi\left(u - \frac{2p\omega}{n}\right) - \varphi(\mu)}\right],$$

d'où, en changeant le signe de μ,

$$\frac{\mathrm{A}\varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) + \mathrm{B}}{\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right) + \varphi\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)} = \frac{1}{\varphi(u) + \varphi(\mu)} + \sum \left[\frac{1}{\varphi\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) + \varphi(\mu)} + \frac{1}{\varphi\left(u - \frac{2p\omega}{n}\right) + \varphi(\mu)}\right];$$

puis, retranchant membre à membre,

$$\frac{\mathrm{A}\varphi^2\left(\frac{u}{a}, \lambda\right) - \mathrm{B}\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)}{\varphi^2\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right) - \varphi^2\left(\frac{u}{a}, \lambda\right)}$$

$$= \frac{\varphi(\mu)}{\varphi^2(u) - \varphi^2(\mu)} + \varphi(\mu) \sum \left[\frac{1}{\varphi^2\left(u + \frac{2p\omega}{n}\right) - \varphi^2(\mu)} + \frac{1}{\varphi^2\left(u - \frac{2p\omega}{n}\right) - \varphi^2(\mu)}\right].$$

Soit maintenant

$$\Pi(x, \mu, k) = \int_0^x \frac{du}{\varphi^2(u, k) - \varphi^2(\mu, k)};$$

l'équation précédente donnera, en intégrant depuis $u = 0$ jusqu'à $u = x$, et en ayant égard aux valeurs des constantes,

$$\frac{\alpha\varphi\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)\Delta\left(\frac{\mu}{a}, \lambda\right)}{\Delta(\mu, k)}\,\Pi\left(\frac{x}{a}, \frac{\mu}{a}, \lambda\right) - \mathrm{A}x = \varphi(\mu)\,\Pi(x, \mu, k)$$

$$+ \varphi(\mu) \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \left[\Pi\left(x + \frac{2p\omega}{n}, \mu, k\right) + \Pi\left(x - \frac{2p\omega}{n}, \mu, k\right)\right],$$

ou bien

$$\alpha\varphi\left(\frac{\mu}{a},\lambda\right)\Delta\left(\frac{\mu}{a},\lambda\right)\Pi\left(\frac{x}{a},\frac{\mu}{a},\lambda\right) = \Delta(\mu,k)\,\mathrm{A}.x + \varphi(\mu,k)\,\Delta(\mu,k)\,\Pi(x,\mu,k)$$

$$+\varphi(\mu,k)\,\Delta(\mu,k)\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\left[\Pi\left(x+\frac{2p\omega}{n},\mu,k\right)+\Pi\left(x-\frac{2p\omega}{n},\mu,k\right)\right].$$

Le second membre peut être ramené à ne contenir qu'une seule fonction de troisième espèce, avec une quantité logarithmique; on a, en effet, la formule

$$\frac{\Delta(\mu)}{\varphi(\mu)-\varphi(x+a)}-\frac{\Delta(\mu)}{\varphi(\mu)-\varphi(x-a)}=\frac{\Delta(x)}{\varphi(x)-\varphi(\mu+a)}-\frac{\Delta(x)}{\varphi(x)-\varphi(\mu-a)},$$

qu'il est facile de vérifier; elle donne, en changeant μ en $-\mu$,

$$\frac{\Delta(\mu)}{\varphi(\mu)+\varphi(x+a)}-\frac{\Delta(\mu)}{\varphi(\mu)+\varphi(x-a)}=\frac{\Delta(x)}{\varphi(x)+\varphi(\mu+a)}-\frac{\Delta(x)}{\varphi(x)+\varphi(\mu-a)}.$$

Ajoutant membre à membre et intégrant depuis $x=0$, on trouve sans peine,

$$\varphi(\mu)\,\Delta(\mu)[\Pi(x-a,\mu)-\Pi(x+a,\mu)] = -2\varphi(\mu)\,\Delta(\mu)\,\Pi(a,\mu) + \frac{1}{2}\log\left\{\frac{1-\frac{\varphi^2(x)}{\varphi^2(\mu+a)}}{1-\frac{\varphi^2(x)}{\varphi^2(\mu-a)}}\right\},$$

d'où, en permutant a et x, et changeant les signes des deux membres,

$$\varphi(\mu)\,\Delta(\mu)[\Pi(x+a,\mu)+\Pi(x-a,\mu)] = 2\varphi(\mu)\,\Delta(\mu)\,\Pi(x,\mu) - \frac{1}{2}\log\left\{\frac{1-\frac{\varphi^2(a)}{\varphi^2(\mu+x)}}{1-\frac{\varphi^2(a)}{\varphi^2(\mu-x)}}\right\}.$$

On arrive donc définitivement à la formule suivante, pour la transformation des fonctions de troisième espèce :

$$\alpha\varphi\left(\frac{\mu}{a},\lambda\right)\Delta\left(\frac{\mu}{a},\lambda\right)\Pi\left(\frac{x}{a},\frac{\mu}{a},\lambda\right) = \Delta(\mu,k)\,\mathrm{A}.x + n\varphi(\mu,k)\,\Delta(\mu,k)\,\Pi(x,\mu,k)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}}\log\left\{\frac{1-\frac{\varphi^2\left(\frac{2p\omega}{n}\right)}{\varphi^2(\mu+x)}}{1-\frac{\varphi^2\left(\frac{2p\omega}{n}\right)}{\varphi^2(\mu-x)}}\right\}.$$

VIII.

Dès les premiers pas qui ont été faits dans la théorie des fonctions elliptiques, on a imaginé de les différentier par rapport au module, ce qui a conduit à plusieurs résultats importants. Or, le même moyen analytique s'applique avec facilité à toutes les fonctions de la forme

$$\int f(x, y)\, dx,$$

où y est donné par l'équation

$$\chi(y) = y^n - X = 0,$$

X étant une fonction entière de x.

Voici, par exemple, le théorème qui en résulte pour les fonctions abéliennes.

Soit

$$F(x) = x(x-a)\ldots(x-k)$$

un polynôme du degré $2m+1$; on pourra représenter toutes les fonctions abéliennes de première et de seconde espèce par l'intégrale

$$z = \int_0^x \frac{(x-a)^k\, dx}{\sqrt{F(x)}},$$

et en considérant z comme une fonction du module a, on obtient l'équation linéaire de l'ordre $2m$

$$0 = \frac{2\sqrt{F(x)}}{(x-a)^{2m-k}}$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=2m+1} \frac{(4m-n-2k)}{1.2.3\ldots n} . F^{(n)}(a) . \frac{(-2)^{2m-n+1}}{(2k-1)(2k-3)\ldots(2k+2n-4m-1)} \cdot \frac{d^{2m-n+1} z}{da^{2m-n+1}}.$$

Lorsque k est compris entre 0 et $m-1$, de sorte que z représente les transcendantes de première espèce, l'intégrale complète s'obtient en ajoutant à la fonction

$$\int_0^x \frac{(x-a)^k\, dx}{\sqrt{F(x)}}$$

les diverses intégrales définies qui entrent dans l'expression des indices de périodicité de la fonction inverse, multipliées chacune par une constante arbitraire.

De là résulteraient facilement, entre autres choses, des théorèmes analogues à l'équation de Legendre entre les fonctions elliptiques complètes de première et de seconde espèce, à modules complémentaires; relation déjà généralisée par divers géomètres [*]. Mais je ne veux pas m'étendre plus longuement sur ce sujet, qui, du reste, donne lieu à de nombreuses conséquences, que je développerai dans une autre occasion.

[*] Voyez, par exemple, un Mémoire de M. Catalan, couronné par l'Académie de Bruxelles.