JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur une propriété des sections coniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 350-352.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__350_0>

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES SECTIONS CONIQUES;

PAR J. LIOUVILLE.

Un polygone quelconque étant circonscrit à une conique, chaque côté est divisé par le point où il touche la courbe en deux segments (s, t), et l'on sait que le produit des segments non contigus (s) pour tout le polygone est égal au produit des segments (t). Cette proposition, à la fois importante et très-simple, a été déjà établie de tant de manières, qu'il doit paraître peu utile d'en donner encore une démonstration nouvelle. Celle que je vais présenter et qui fournit d'ailleurs une expression curieuse du rapport des deux tangentes AM, AN menées d'un point A quelconque à une conique, mérite pourtant, je crois, quelque attention parce que le théorème dont elle se déduit est général et relatif à des courbes de degré quelconque.

Le théorème dont je parle est démontré dans les dernières pages de mon *Mémoire sur quelques propositions générales de géométrie*, etc. (Tome VI de ce Journal, page 411.) Ce Mémoire, où j'ai posé, si je ne me trompe, les premiers principes de la théorie des transversales curvilignes considérée dans toute son étendue, renferme entre autres la proposition suivante :

« Deux courbes géométriques étant situées dans un même plan,
» représentons, en général, par R, r les rayons de courbure de ces
» courbes à un de leurs points d'intersection, et par Ω, ω les angles
» que les tangentes menées en ces points aux deux courbes font avec
» un axe fixe pris à volonté; on aura

$$\sum \left(\frac{\cos\omega}{R} - \frac{\cos\Omega}{r}\right) \operatorname{cosec}^3(\Omega - \omega) = 0,$$

» le signe sommatoire du premier membre s'étendant à tous les points
» d'intersection, réels ou imaginaires, bien entendu. »

Supposons maintenant que la première de nos deux lignes planes soit une conique et que l'autre se réduise à une ligne droite coupant la conique aux deux points M, N. Prenons de plus pour axe fixe cette droite même. Les rayons de courbure r relatifs à la droite seront infinis; les angles ω seront nuls; et notre équation ainsi particularisée deviendra

$$\frac{\operatorname{cosec}^3 \Omega}{R} = \frac{\operatorname{cosec}^3 \Omega'}{R'},$$

R, R′ étant les rayons de courbure en M, N, et Ω, Ω' représentant les angles M, N du triangle AMN formé par la corde MN et les tangentes menées à la conique aux points M et N. Or le rapport des cosécantes de ces angles est celui des inverses de leurs sinus ou celui des côtés AM, AN. On a donc

$$\frac{\overline{AM}^3}{\overline{AN}^3} = \frac{R}{R'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{AM}{AN} = \frac{\sqrt[3]{R}}{\sqrt[3]{R'}};$$

telle est l'équation qu'il fallait trouver.

Elle se vérifie, par exemple, en plaçant les points de contact M, N aux deux sommets d'une ellipse dont a et b sont les demi-axes; on a, en effet, alors

$$AM = a, \quad AN = b, \quad R = \frac{a^2}{b}, \quad R' = \frac{b^2}{a},$$

d'où

$$\frac{R}{R'} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{\overline{AM}^3}{\overline{AN}^3},$$

conformément à l'équation ci-dessus.

Au reste, cette formule une fois obtenue peut être vérifiée facilement de diverses manières; mais on doit, ce me semble, attacher quelque prix à la démonstration que nous venons d'en donner et qui fait bien comprendre, par un exemple simple, l'utilité des considérations générales dont elle a été déduite.

Considérons à présent une portion quelconque MANBP...CQ de polygone circonscrit à une conique qu'elle touche successivement aux points M, N,..., Q. On verra sans peine (on n'a pour cela qu'à composer des rapports) qu'en nommant s, s',... les segments non contigus MA, NB,..., et t, t',... les autres segments AN, BP,..., aussi non contigus, les produits ss'... et tt'... sont entre eux comme les racines cubiques des rayons de courbure aux points extrêmes M, Q. Lorsque le polygone est fermé, ces deux points extrêmes coïncident, et le rapport des produits ss'..., tt'... devient égal à l'unité. De là une démonstration nouvelle et singulière du théorème qui concerne ces produits.

La formule

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}} = \frac{\sqrt[3]{\mathrm{R}}}{\sqrt[3]{\mathrm{R}'}},$$

qui nous donne le rapport des deux tangentes AM, AN menées du point A à la conique, en fournit une autre plus simple encore. Par les points de contact M et N menons deux normales à la courbe, et soient n et n' les longueurs de ces normales terminées à un des axes principaux. On a, comme on sait,

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} = \frac{n^3}{n'^3}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}} = \frac{n}{n'}:$$

par suite, dans le polygone circonscrit non fermé dont on a parlé plus haut, le rapport des produits ss'..., tt'... est égal au rapport des normales aux points extrêmes.