JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FINCK

Note relative à l'élimination

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 334-335.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__334_0>

NOTE RELATIVE A L'ÉLIMINATION;

Par M. FINCK,

Professeur de Mathématiques à Strasbourg.

Ce qui suit a trait au Mémoire sur le degré de l'élimination, par M. Minding. (Tome VI de ce Journal, page 412.) Pour déterminer ce degré, l'auteur emploie la réduction en séries, appliquée aux racines d'une équation. Pour faire descendre dans les éléments la propriété en question, j'ai dû chercher à éviter les séries. Voici comment j'y parviens.

Soit l'équation

$$(1)\quad x^4(y^6+\ldots)+x^3(y^2+\ldots)+x^2(y^7+\ldots)+x(y+\ldots)+y^2+\ldots=0.$$

Je nomme α_1, α_2, α_3, α_4 les quatre valeurs de x; je les suppose rangées d'après leur degré en y, α_4 étant celle dont le degré est le plus faible.

Soit i une indéterminée; divisons l'équation (1) par y^{4i} et par le facteur de x^4; il vient

$$(2)\quad \left(\frac{x}{y^i}\right)^4+\left(\frac{x}{y^i}\right)^3\cdot\frac{y^2+\ldots}{y^{6+i}+\ldots}+\left(\frac{x}{y^i}\right)^2\cdot\frac{y^7+\ldots}{y^{6+2i}+\ldots}+\frac{x}{y^i}\cdot\frac{y+\ldots}{y^{6+3i}+\ldots}+\frac{y^2+\ldots}{y^{6+4i}}=0.$$

On cherchera s'il est possible de disposer de i, de telle sorte que, parmi les quatre valeurs de $\frac{x}{y^i}$, il y en ait trois qui soient nulles, et que la quatrième soit finie et différente de zéro si $y=\infty$; la valeur de i qui satisferait à cette condition serait le degré de α_1. Pour cela, il faut et il suffit que, dans le coefficient de $\left(\frac{x}{y^i}\right)^3$, le dénominateur soit de même degré que le numérateur, tandis que dans les suivants, le dénominateur doit être d'un degré supérieur à celui du numérateur correspondant.

On essaye donc

$$6+i=2,\quad 6+2i>7,\quad 6+3i>1,\quad 6+4i>2.$$

La valeur $i=-4$, tirée de la première relation, ne satisfait point aux autres, d'où l'on conclura que α_1, α_2 sont du même degré. Pour déterminer ce degré, on posera, par rapport à l'équation (2),

$$6+i \overset{=}{>} 2,\quad 6+2i=7,\quad 6+3i>1,\quad 6+4i>2,\quad \text{d'où}\quad i=\tfrac{1}{2},$$

qui remplit toutes les autres conditions. Donc α_1, α_2 sont du degré $\frac{1}{2}$.

Reprenant l'équation (2), on sait que parmi les quatre valeurs de $\frac{x}{y^i}$, il y en a deux qui deviennent infinies avec y si $i<\frac{1}{2}$. Relativement aux deux autres valeurs de $\frac{x}{y^i}$, on supprimera donc les deux premiers termes de l'équation (2), et on la divisera par le facteur de $\left(\frac{x}{y^i}\right)^2$; d'où

$$\left(\frac{x}{y^i}\right)^2+\frac{x}{y^i}\cdot\frac{y+\ldots}{y^{7+i}+\ldots}+\frac{y^2+\ldots}{y^{7+2i}}=0.$$

Cherchons si avec $y=\infty$, le dernier terme peut s'annuler sans que le facteur de $\frac{x}{y^i}$ s'annule. A cet effet, il faut que $7+i=1$, et $7+2i>2$, ce qui ne se peut. Donc α_3, α_4 sont du même degré. Pour déterminer ce degré, on fera

$$7+i \overset{=}{>} 1,\quad 7+2i=2,\quad \text{d'où}\quad i=-\tfrac{5}{2};$$

c'est le degré de α_3 et α_4.

En appliquant la méthode aux exemples de M. Minding, on retrouve ses nombres. Je pense que ce qui précède suffit.