JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

Addition à la Note sur les relations entre les neuf cosinus des angles de deux systèmes de trois droites rectangulaires. - Démonstration géométrique et directe des relations binômes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 310-312.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__310_0>

ADDITION

A la Note sur les relations entre les neuf cosinus des angles de deux systèmes de trois droites rectangulaires [*]. — *Démonstration géométrique et directe des relations binômes;*

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Les binômes appelés quelquefois *déterminants*, dont les deux termes offrent, dans leur composition, une sorte de réciprocité et sont séparés par le signe —, se présentent fréquemment en géométrie et en mécanique : on les retrouve dans les expressions des moments et des aires, ainsi que dans les nombreuses formules exprimant les affections ou les propriétés des lignes courbes à double courbure, etc. Ils ont souvent pour origine, ou une résolution d'équations du premier degré à deux inconnues, ou une soustraction de deux fractions l'une de l'autre. Mais ils ont aussi une signification géométrique qu'il est utile de faire ressortir, et qui peut fournir des démonstrations très-directes des formules où ils entrent : c'est ce que nous allons faire voir sur celles de la Note citée.

[*] Insérée dans ce Journal, cahiers de juillet et d'août.

Si, au lieu de neuf quantités a, a', a'', b,..., on en a n^2, n étant un nombre quelconque, et si elles sont liées par $n + n\dfrac{n-1}{2}$ relations analogues aux six relations (1) de la page 270, il existe aussi, entre elles, $n + n\dfrac{n-1}{2} + n^2$ autres relations analogues à celles (2), (3), ainsi que M. Catalan l'a démontré d'une manière simple et générale. (Première partie d'un Mémoire inséré au tome XIV de ceux qui ont été couronnés par l'Académie de Bruxelles, 1840.) Sa méthode n'a rien de commun avec celle dont je me suis servi, parce qu'elle se fonde sur l'emploi d'indéterminées comme celles qui ont été introduites par Poisson (*Correspondance de l'École polytechnique*), et qui, comme on l'a dit à la Note, ne sont autre chose que les coordonnées entrant dans les démonstrations de Lagrange (*Mécanique analytique*, t. II, IX, 6), et de Lacroix (*Calcul différentiel*, in-4°, chap. V).

Elles sont une conséquence de ce théorème de géométrie projective :

« Soit un triangle dans l'espace, et soient p, p' les projections de » deux de ses côtés sur une droite, q, q' leurs projections sur une » autre droite coupant à angle droit la première; la projection de son » aire sur le plan de ces deux droites sera $\pm \frac{1}{2}(pq' - qp')$, c'est-à- » dire la différence des aires de deux triangles dont chacun a pour » base la projection d'un des côtés du triangle donné sur une des » droites, et pour hauteur celle de l'autre côté sur l'autre droite. »

On peut déduire ce théorème, comme a fait M. Cauchy [*], de la formule du sinus de la différence de deux angles; car si m, m' sont les projections des deux côtés du triangle sur le plan, $\frac{p}{m}$, $\frac{p'}{m'}$ sont les cosinus et $\frac{q}{m}$, $\frac{q'}{m'}$ les sinus des angles de ces projections avec la première droite; d'où $\sin\widehat{(m'm)} = \pm\left(\frac{q'}{m'}\frac{p}{m} - \frac{q}{m}\frac{p'}{m'}\right)$, et l'aire du triangle projeté est $\frac{1}{2}m.m'\sin\widehat{(m'm)} = \pm(pq' - qp')$.

Mais on peut encore démontrer comme il suit, et sans invoquer aucune formule, ce théorème important qui, une fois admis en géométrie, dispense de beaucoup de redites et de beaucoup de calculs.

Supposons (ce qui ne change rien aux projections) que les deux droites rectangulaires passent par le point de concours o des projections om, om' des deux côtés du triangle sur le plan de ces droites. Les triangles qui ont pour sommet commun l'extrémité m' de la projection du deuxième côté, et pour bases les projections $op = p$, $oq = q$ du premier côté ou de om sur les deux droites, ont pour hauteurs respectives q' et p', distances de m' aux mêmes droites, en sorte que ce sont les deux triangles dont parle l'énoncé du théorème, ayant pour aires $\frac{1}{2}pq'$, $\frac{1}{2}qp'$. Il s'agit donc seulement de faire voir que le triangle projeté omm' est égal à leur différence : or cela se peut facilement de deux manières :

1°. Ces trois triangles $om'p$, $om'q$, $om'm$ ont un côté commun om' que l'on peut prendre pour leur base : les aires sont comme les hauteurs, c'est-à-dire comme les projections, sur une perpendiculaire à om', des trois côtés adjacents op, oq, om. Or celui-ci est la diagonale

[*] *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal*, 1826, page 12.

du rectangle formé sur les deux autres; sa projection, sur une perpendiculaire à om' qui est supposé passer dans l'angle qop, est égale à la différence des projections des deux autres. Donc

$$omm' = \pm \left(\tfrac{1}{2}\, p.q' - \tfrac{1}{2}\, q.p'\right).$$

2°. En traçant la figure, on reconnaît, si le point m' est plus distant que m des deux droites, que l'on a l'aire $omm' = om'p - (omp + pmm')$. Or les deux triangles entre parenthèse ont une base commune $mp = qo = q$, et deux hauteurs dont la somme est p'. Donc, comme $om'p = \frac{1}{2}\, pq'$, on a encore $omm' = \frac{1}{2}\, p.q' - \frac{1}{2}\, q.p'$, quantité qui ne fait que changer de signe si p', q' ont d'autres rapports avec p, q. C'est la démonstration élémentaire connue du théorème du moment de la résultante de deux forces autour d'un point situé dans leur angle. (*Poisson*, deuxième édition, n° 271.)

Revenons maintenant aux deux systèmes $(ox,\ oy,\ oz)$ de droites rectangulaires et $(ox_1,\ oy_1,\ oz_1)$ de droites obliques de la Note citée. Sur les deux droites obliques oy_1, oz_1 prenons, à partir du point de concours o, deux longueurs égales à l'unité : l'aire du triangle isocèle formé sur elles sera $\frac{1}{2}\sin y_1oz_1$; sa projection sur le plan yoz de deux des droites du système rectangulaire sera $\mathrm{A}.\frac{1}{2}\sin y_1oz_1$, puisque A est le cosinus de l'angle des droites ox, ox' respectivement perpendiculaires aux plans yoz, y_1oz_1. Donc, comme les projections, sur oy, oz, de l'unité de longueur portée sur oy_1, oz_1 ne sont autre chose que les cosinus des angles formés par ces diverses droites, on aura, en vertu du théorème démontré,

$$\pm\,\mathrm{A}\sin y_1oz_1 = \cos yoy_1 \cos zoz_1 - \cos yoz_1 \cos zoy_1 = b'c'' - c'b'',$$

ce qui est une des équations du n° **6** (page 274). On démontrerait de même les autres, et par là se trouvent aussi démontrées les neuf équations (3) du n° **1**, puisqu'elles sont relatives au cas où les sinus des angles y_1oz_1, z_1oy_1, x_1oy_1 des droites du second système sont égaux à l'unité.

On voit ainsi que les binômes réciproques, qui forment les seconds membres de ces équations, peuvent être regardées comme représentant des différences d'aires triangulaires doublées.