JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. LOBATTO

Note sur quelques nouveaux caractères propres à reconnaître l'imaginarité de deux racines d'une équation numérique, situées entre des limites données

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 295-309.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__295_0>

NOTE

Sur quelques nouveaux caractères propres à reconnaître l'imaginarité de deux racines d'une équation numérique, situées entre des limites données;

PAR R. LOBATTO,
Professeur de Mathématiques à l'Académie royale de Delft.

L'illustre auteur de l'*Analyse des équations déterminées* a déduit directement, à l'aide de considérations géométriques, une règle bien simple pour juger de la nature de deux racines d'une équation, comprises entre les limites données α et β. Cette règle, qui sans doute aurait été moins facile à découvrir par la seule analyse, suppose, comme l'on sait, que l'équation proposée

$$f(x) = 0$$

n'ait que deux racines entre $x = \alpha$ et $x = \beta$; que l'équation

$$\frac{df(x)}{dx} \quad \text{ou} \quad f'(x) = 0$$

ait une seule racine, et que celle

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} \quad \text{ou} \quad f''(x) = 0$$

n'en présente aucune dans le même intervalle (α, β); ce qui revient à supposer que l'arc de courbe représenté par l'équation

$$y = f(x),$$

et limité par les ordonnées qui correspondent aux abscisses α et β, n'ait aucun point d'inflexion, mais seulement un point où la tangente devient parallèle à l'axe des x, et dont l'ordonnée acquiert par conséquent une valeur maximum ou minimum. (Voyez *Pl. II, fig.* 1, 2, 3, 4.)

Soient PM, P_1M_1 (*fig.* 1, 2) deux ordonnées représentées par $f(\alpha)$, $f(\beta)$; Mt, M_1t_1 les sous-tangentes des points P, P_1 de la courbe, ayant pour valeurs numériques $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$. Il est évident que cet arc de courbe ne pourra être coupé par l'axe des x en deux points a, a_1, ou, en d'autres termes, que l'équation

$$f(x) = 0$$

ne pourra avoir deux racines réelles entre α et β, à moins que ces limites ne satisfassent à l'inégalité

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} < \beta - \alpha,$$

abstraction faite des signes; d'où l'on est en droit de conclure, que si l'équation

$$f(x) = 0$$

donne, au contraire,

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ ou } > \beta - \alpha,$$

ce sera un indice certain de l'imaginarité des deux racines indiquées dans l'intervalle (α, β). Cette circonstance est d'ailleurs confirmée géométriquement dans les *fig.* 3, 4, où la somme des sous-tangentes M_1t_1, M_2t_2 surpasse la différence M_1M_2 des deux abscisses.

Tel est le caractère indiqué par Fourier pour s'assurer que deux racines manquent entre les limites α et β, lorsque les deux suites

$$(\alpha) \qquad f^{(m)}(\alpha)\, f^{(m-1)}(\alpha) \ldots f^{'''}(\alpha)\, f''(\alpha)\, f'(\alpha)\, f(\alpha),$$
$$(\beta) \qquad f^{m}(\beta)\, f^{m-1}(\beta) \ldots f'''(\beta)\, f''(\beta)\, f'(\beta)\, f(\beta),$$

offrent une perte de deux variations, pourvu qu'en omettant les deux derniers termes, ces suites présentent le même nombre de variations. On sait d'ailleurs que les termes de chaque suite ont un rapport déterminé avec les coefficients des équations transformées en $(x - \alpha)$ et $(x - \beta)$, de sorte qu'on peut se servir également de ces coefficients dans l'examen dont il s'agit.

Quelque simple que soit l'application numérique de la règle due au susdit géomètre, il faut convenir cependant que cet avantage diminue beaucoup par la nécessité où l'on se trouve très-souvent de remplacer successivement les deux limites α, β par deux autres plus rapprochées, et de calculer en conséquence les valeurs de $f(x)$ et $f'(x)$ relatives à ces nouvelles limites. En effet, puisque l'inégalité

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} < \beta - \alpha$$

exprime seulement une *condition* et non pas un *caractère exclusif* pour la réalité des deux racines situées entre α et β, il peut arriver que l'inégalité précédente soit vérifiée même dans le cas de deux racines imaginaires, ainsi que l'indiquent les *fig.* 3, 4, où la somme des sous-tangentes aux points P, P_3 reste inférieure à la différence des deux abscisses. Cette circonstance tient, comme l'on voit, à ce que les limites α, β ne sont pas encore assez voisines pour vérifier la règle en question, et c'est alors qu'il devient nécessaire d'y soumettre une ou plusieurs limites intermédiaires, jusqu'à ce que l'on soit assuré de l'imaginarité des deux racines, ou de leur réalité dans le cas d'un changement de signe dans la valeur de $f(x)$.

L'objet principal de la présente Note est de faire voir qu'en s'appuyant sur les principes établis par Fourier même, on peut parvenir à d'autres caractères propres à s'assurer plus promptement de l'imaginarité des racines comprises dans l'intervalle (α, β), et l'on doit s'étonner, en effet, qu'ils aient pu échapper au géomètre à qui l'analyse des équations est redevable de tant de belles et profondes recherches.

Considérons, à cet effet, un point intermédiaire p_1 (*fig.* 5) peu éloigné du point p où la tangente est parallèle à l'axe des x. Nommons $\alpha + \delta$ l'abscisse Om_1 du point p_1, qui représentera alors une valeur approchée de la racine α' de l'équation

$$f'(x) = 0.$$

Cette valeur sera $>$ ou $< \alpha'$, selon que p_1 sera pris à droite ou à gauche de p. Or, l'inspection de la figure indique de suite que si, dans le premier cas, les points P et p_1 sont assez voisins pour que la sous-tangente Mt égale ou surpasse la distance $Mm_1 = \delta$, il en résultera pour caractère d'imaginarité des racines

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ ou } > \delta;$$

et si, dans le second cas, la sous-tangente M_1t_1 égale ou surpasse la distance M_1m_1, on aura, pour second caractère semblable,

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ ou } > \beta - \alpha - \delta,$$

ou bien

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \delta = \text{ ou } > \beta - \alpha.$$

Quant à la valeur de δ, on peut la déduire des formules données par l'approximation newtonienne ou linéaire, et discutées avec soin par Fourier, dans le livre de son ouvrage cité.

Il résulte d'abord de cette discussion que les formules

$$\alpha - \frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}, \quad \beta - \frac{f'(\beta)}{f''(\beta)},$$

expriment deux valeurs approchées de la racine de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

comprise entre α et β, mais qui seront chacune trop fortes ou trop faibles, selon que $f'(x)$ et $f'''(x)$ se trouveront affectées de signes contraires ou de mêmes signes.

Admettons d'abord le premier cas. Il viendra alors pour δ les deux valeurs

$$\delta = -\frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}, \quad \text{et} \quad \delta = \beta - \alpha - \frac{f'(\beta)}{f''(\beta)},$$

d'où résultent les caractères d'imaginarité

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ ou } > \frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}, \\ &\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ ou } > \beta - \alpha - \frac{f'(\beta)}{f''(\beta)}, \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(2) \qquad \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f'(\beta)}{f''(\beta)} = \text{ ou } > \beta - \alpha.$$

abstraction faite des signes. Dans le second cas, on obtiendra de la même manière

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)} = \text{ ou } > \beta - \alpha, \\ &\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \beta - \alpha - \frac{f'(\beta)}{f''(\beta)} = \text{ ou } > \beta - \alpha, \end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(4)\qquad \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ ou } > \frac{f'(\beta)}{f''(\beta)}.$$

Voilà donc quatre nouveaux caractères qui pourront servir d'auxiliaires à celui de Fourier, toutes les fois qu'on ne pourra distinguer par ce dernier la nature des racines sans recourir à des limites intermédiaires.

On remarquera que (1) et (2) ne diffèrent de (3) et (4) que par le changement de α en β; on pourrait donc se borner aux deux premiers, en ayant soin d'y remplacer la première limite par la seconde [*].

Mais on peut obtenir encore d'autres caractères semblables aux précédents. Observons, à cet effet, ainsi qu'il a été prouvé par Fourier, que si les valeurs approchées

$$\alpha - \frac{f'(\alpha)}{f''(\alpha)}, \quad \beta - \frac{f'(\beta)}{f''(\beta)},$$

sont trop fortes, celles-ci

$$\alpha - \frac{f'(\alpha)}{f''(\beta)}, \quad \beta - \frac{f'(\beta)}{f''(\alpha)},$$

seront au contraire trop faibles, et réciproquement. Donc, en raisonnant comme ci-dessus, on trouvera encore, par une simple permuta-

[*] Je dois avertir ici que les caractères (1), (4) ont déjà été indiqués par moi dans un Mémoire ayant pour titre : *Recherches sur la distinction des racines réelles et imaginaires dans les équations numériques, etc.*, et publié à la Haye en 1843. Mais les considérations géométriques qui m'ont guidé dans ces recherches sont moins simples que celles dont je me suis servi maintenant, et ne m'ont pu conduire, en outre, aux autres caractères exposés dans la présente Note.

tion des fonctions $f''(\alpha)$, $f''(\beta)$,

$$(5)\qquad \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ ou } > \frac{f'(\alpha)}{f''(\beta)},$$

$$(6)\qquad \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f'(\beta)}{f''(\alpha)} = \text{ ou } > \beta - \alpha,$$

$$(7)\qquad \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \frac{f'(\alpha)}{f''(\beta)} = \text{ ou } > \beta - \alpha,$$

$$(8)\qquad \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ ou } > \frac{f'(\beta)}{f''(\alpha)}.$$

L'approximation linéaire conduit de plus à la formule

$$\beta - \frac{(\beta-\alpha)f(\beta)}{f'(\beta)-f'(\alpha)},$$

d'où l'on tire

$$\delta = -\frac{(\beta-\alpha)f'(\alpha)}{f'(\beta)-f'(\alpha)} = \frac{(\beta-\alpha)f'(\alpha)}{f'(\beta)+f'(\alpha)},$$

abstraction faite des signes; cette valeur approchée étant trop grande ou trop petite, selon que les signes des fonctions $f'(\alpha)$, $f'''(\alpha)$ s'accordent ou non. Dans le premier cas, on sera assuré que les deux racines sont imaginaires lorsqu'on trouvera

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ ou } > \frac{(\beta-\alpha)f'(\alpha)}{f'(\beta)+f'(\alpha)},$$

ou bien

$$(9)\qquad \left[1 + \frac{f'(\beta)}{f'(\alpha)}\right]\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ ou } > \beta - \alpha;$$

et dans le second cas, lorsqu'on aura

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ ou } > \beta - \alpha - \delta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ ou } > \frac{(\beta-\alpha)f'(\beta)}{f'(\beta)+f'(\alpha)},$$

ou bien

$$(10)\qquad \left[1 + \frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}\right]\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ ou } > \beta - \alpha.$$

En supposant $\beta - \alpha = 1$, ainsi que cela arrive le plus souvent, les deux derniers résultats se réduisent à ceux-ci

$$(9') \qquad 1 + \frac{f'(\beta)}{f'(\alpha)} = \text{ ou } > \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)},$$

$$(10') \qquad 1 + \frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)} = \text{ ou } > \frac{f'(\beta)}{f(\beta)}.$$

Nous venons ainsi de découvrir en tout cinq différents caractères d'imaginarité, et qui peuvent être appliqués soit à la première, soit à la seconde des limites α et β.

On pourrait penser au premier abord que le système (1), (2), (7), (8), (10) est seulement applicable au cas où les fonctions $f'(x)$, $f'''(x)$ diffèrent de signe à la première limite α, et le système (3), (4), (5), (6), (9) au cas contraire. Mais il faut observer qu'en changeant x en $-x$, la seconde limite β tiendra lieu de la première, attendu que la suite $(-\beta)$ ou la transformée en $-(x-\beta)$ offrira alors deux variations de plus que la suite $(-\alpha)$; et comme les fonctions $f'(x)$, $f'''(x)$ seront affectées de signes égaux pour $x = \pm\beta$, lorsqu'elles présentent deux signes différents pour $x = \pm\alpha$, il en résulte que le second système deviendra alors applicable à la limite β, et que l'on pourra, par conséquent, se servir indifféremment de l'un et de l'autre système de caractères.

N'oublions pas de faire remarquer encore que nos résultats étant fondés sur les formules de l'approximation linéaire, supposent nécessairement que chacune des fonctions $f''(x)$, $f'''(x)$ conserve son signe dans l'intervalle (α, β). Il faudra donc, avant de les appliquer, s'assurer, à l'aide des suites (α) et (β), ou du théorème de Budan, si cette condition est remplie.

Si la différence $\beta - \alpha$ ne surpasse pas l'unité, il arrivera rarement qu'il faille recourir à des limites intermédiaires, pour s'assurer de l'imaginarité des deux racines.

Si, au contraire, cette différence s'élève à un nombre m d'unités, et qu'aucun des caractères n'ait pu faire reconnaître la nature des racines, on prendra alors pour limites plus rapprochées deux nombres entiers α' et $\alpha' + 1$, comprenant une racine de l'équation

$$f'(x) = 0.$$

Je rapporterai maintenant quelques exemples propres à faire apprécier l'utilité des caractères auxiliaires, ci-dessus obtenus.

Considérons d'abord l'équation

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 18x + 5,5 = 0.$$

La transformée en $(x - 1)$ ayant pour coefficients

$$1 + 12 + 40 + 30 + 6,5,$$

il en résulte que deux racines sont indiquées entre 0 et 1 ; que l'équation

$$f'(x) = 0$$

n'a qu'une seule racine, et que l'équation

$$f''(x) = 0$$

n'en a aucune entre ces limites [*]. La proposée satisfait ainsi aux conditions exigées pour l'application de la règle de Fourier, et donne, à cet effet,

$$f(\alpha) = 5,5,\quad f'(\alpha) = -18,\quad f(\beta) = 6,5,\quad f'(\beta) = 30.$$

Or, puisqu'on a

$$\frac{5,5}{18} + \frac{6,5}{30} < 1.$$

On est encore incertain si les racines sont réelles ou imaginaires. Essayons donc une limite intermédiaire 0,5; il viendra, pour les coefficients de la transformée en $(x - 0,5)$,

$$1 + 10 + 23,5 - 1,5 + 0,0625,$$

d'où l'on voit que les racines devront être cherchées entre 0,5 et 1. La règle dont il s'agit est encore insuffisante pour juger de leur nature,

[*] Les coefficients d'une transformée en $(x - \alpha)$ s'obtiennent très-promptement à l'aide d'un algorithme de calcul dû au géomètre anglais Horner, que nous avons expliqué dans notre Mémoire cité, et qui comprend celui de Budan, comme un cas particulier.

attendu que

$$\frac{0{,}062}{1{,}5} + \frac{6{,}5}{30} < 0{,}5.$$

Il faudra ainsi recourir à une nouvelle limite intermédiaire, pour laquelle on prendra 0,7. Le calcul des coefficients de la transformée en $(x - 0{,}7)$ fournit les nombres

$$1 + 11{,}8 + 29{,}74 + 9{,}13 + 0{,}78;$$

d'où l'on conclura que les deux racines sont situées entre 0,5 et 0,7. Mais puisque

$$\frac{0{,}062}{1{,}5} + \frac{0{,}78}{9{,}13} < 0{,}2,$$

on reste encore dans l'incertitude, et l'on est obligé de recourir à une troisième limite intermédiaire 0,6, qui fournira les coefficients

$$1 + 10{,}4 + 26{,}56 + 3{,}50 + 0{,}157,$$

indiquant que les racines se trouvent entre 0,5 et 0,6. Mais leur nature reste encore indécise, puisque

$$\frac{0{,}06}{1{,}5} + \frac{0{,}157}{3{,}50} < 0{,}1.$$

Adoptons maintenant une quatrième limite 0,55. On obtiendra pour les coefficients de la transformée y relative

$$1 + 10{,}2 + 25{,}014 + 0{,}925 + 0{,}0475.$$

Les deux racines devront être cherchées entre 0,5 et 0,55; et puisque

$$\frac{0{,}0475}{0{,}925} > 0{,}05,$$

on est enfin assuré que les deux racines sont imaginaires.

On voit que l'équation précédente s'est trouvée dans des circonstances assez défavorables à l'application de la règle de Fourier, attendu qu'elle a exigé le calcul relatif à quatre limites intermédiaires, avant qu'on ait pu prononcer sur la nature des racines.

La fonction $f'''(x)$ conservant son signe entre 0 et 1, nous pouvons essayer ici l'un des caractères auxiliaires. La proposée donne

$$\tfrac{1}{2}f''(\alpha) = 10, \quad \tfrac{1}{2}f''(\beta) = 40.$$

Les deux premiers seront trouvés insuffisants, à cause de

$$\frac{5,5}{18} < \frac{18}{20}, \quad \frac{5,5}{18} + \frac{6,5}{80} < 1.$$

Le troisième, au contraire, sera vérifié, car on a

$$\frac{6,5}{30} + \frac{18}{20} > 1.$$

On est donc déjà assuré de l'imaginarité des deux racines, sans qu'il faille recourir à quelque nouvelle limite intermédiaire.

Prenons pour second exemple l'équation

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 28x^2 - 81x + 53 = 0.$$

On trouvera, pour les coefficients des transformées en $(x-1)$ et $(x-2)$,

$$\begin{array}{l} 1 + \ \ 6 + 40 - 15 + \ \ 3, \\ 1 + 10 + 64 + 87 + 35. \end{array}$$

Il s'agit de savoir si les deux racines indiquées entre les limites 1 et 2 sont réelles ou non. On a

$$\begin{array}{lll} f(\alpha) = \ \ 3, & f'(\alpha) = -15, & f''(\alpha) = \ \ 80, \\ f(\beta) = 35, & f'(\beta) = \ \ 87, & f''(\beta) = 128. \end{array}$$

D'ailleurs les fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ remplissent les conditions voulues. La règle de Fourier ne peut lever l'incertitude, à cause de l'inégalité

$$\frac{3}{15} + \frac{35}{87} < 1,$$

de sorte qu'il faudrait calculer les valeurs de $f(x)$ et $f'(x)$ pour une limite intermédiaire. Mais, en essayant le caractère (1), on trouve de suite

$$\frac{1}{15} > \frac{15}{80},$$

d'où l'on est assuré que les deux racines sont imaginaires.

Soit encore l'équation

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 37x^2 - 36x + 15 = 0.$$

Les coefficients de la transformée en $(x - 1)$ étant

$$1 - 5 + 16 + 15 + 8,$$

il faudra chercher deux racines entre 0 et 1.

On a

$$f(\alpha) = 15, \quad f'(\alpha) = -36, \quad f''(\alpha) = 74,$$
$$f(\beta) = 8, \quad f'(\beta) = 15, \quad f''(\beta) = 32,$$
$$\frac{15}{36} + \frac{8}{15} < 1, \quad \text{indice incertain.}$$

En employant le caractère (3), on est de suite averti que les racines sont imaginaires, puisque

$$\frac{8}{15} + \frac{36}{74} > 1.$$

La même conclusion aurait pu être déduite du caractère (4), à cause de

$$\frac{8}{15} > \frac{15}{32}.$$

Examinons en dernier lieu l'équation

$$f(x) = x^6 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0,$$

qui donne, pour la transformée en $(x - 1)$, les coefficients

$$1 + 6 + 15 + 17 + 10 + 2,$$

indiquant que trois racines peuvent exister entre 0 et 1.

L'équation

$$f'(x) = 0$$

ayant deux racines dans le même intervalle, il faudra s'assurer si elles sont réelles ou non. Les deux séries des coefficients y relatives sont :

Pour l'équation en x,

$$5 + 4 + 3 - 4 + 2;$$

pour l'équation en $(x - 1)$,

$$5 + 24 + 45 + 34 + 10.$$

La règle de Fourier ne décide pas encore la nature de ces deux racines, puisqu'on trouve

$$\frac{2}{4} + \frac{10}{34} < 1.$$

Mais le caractère (5) donnant

$$\frac{2}{4} > \frac{4}{90},$$

il en résulte immédiatement que les équations

$$f'(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 0$$

ont deux racines imaginaires.

Fourier n'a considéré que le cas où l'arc de courbe compris entre les limites $x = \alpha$ et $x = \beta$ n'offre aucun point d'inflexion, ce qui n'arrive pas toujours, car très-souvent les suites (α), (β) indiqueront que les équations

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0,$$

ont chacune une racine dans l'intervalle (α, β). Si alors les deux racines de la proposée sont imaginaires, la courbe affectera, à l'égard de l'axe des x, une des quatre formes représentées dans les *fig.* 6, 7, 8, 9, contenant en p un point d'inflexion.

Dans ce cas, la fonction $f(x)$ et ses trois dérivées prendront aux deux limites les signes indiqués au tableau suivant :

		$f(x)$.	$f'(x)$.	$f''(x)$.	$f'''(x)$.
Fig. 6,	$x = \alpha$,	+	−	+	−
	$x = \beta$,	+	+	−	−
Fig. 7,	$x = \alpha$,	+	−	−	+
	$x = \beta$,	+	+	+	+
Fig. 8,	$x = \alpha$,	−	+	−	+
	$x = \beta$,	−	−	+	+
Fig. 9,	$x = \alpha$,	−	+	+	−
	$x = \beta$,	−	−	−	−

Il en résulte, en supposant que $f'''(x)$ conserve son signe depuis $x=\alpha$ jusqu'à $x=\beta$, que la suite (α) offrira deux variations de plus que la suite (β).

La règle de Fourier devient évidemment inapplicable au cas actuel; mais voici comment on pourra y suppléer.

Soit encore $\alpha + \delta$ une valeur approchée de la racine de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

mais supérieure à la valeur exacte. Les *fig.* 6 et 8 fourniront de même pour caractère d'imaginarité,

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ou} > \delta.$$

Si, au contraire, la valeur $\alpha + \delta$ est trop petite, les *fig.* 7 et 9 donneront le caractère

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ou} > \beta - \alpha - \delta,$$

ou bien

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \delta = \text{ou} > \beta - \alpha.$$

Dans le premier cas, la courbe représentée par l'équation

$$f'(x) = 0$$

prendra entre les deux limites données l'une des deux formes indiquées par les *fig.* 10 et 12. Les formules de l'approximation newtonienne ne pourront s'appliquer ici qu'à la première limite, à cause qu'il existe entre a et P un point p où la tangente devient parallèle à l'axe des x. Or la valeur approchée $\alpha + \delta$ étant alors trop petite, il faudra prendre pour δ la partie $\mathrm{M}r = \frac{(\beta-\alpha)f'(\alpha)}{f'(\alpha)+f'(\beta)}$ qui est supérieure à la racine de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

ce qui fournira le caractère

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ou} > \frac{(\beta-\alpha)f'(\alpha)}{f'(\alpha)+f'(\beta)},$$

ou bien

$$\left[1 + \frac{f'(\beta)}{f'(\alpha)}\right]\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \text{ou} > \beta - \alpha.$$

Dans le second cas, la courbe dont il s'agit affectera l'une des formes représentées par les *fig.* 11 et 13; et l'on s'assure pareillement qu'il faudra se borner à la même valeur de δ, d'où il suit

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ ou } > \frac{(\beta-\alpha)f'(\beta)}{f'(\alpha)+f'(\beta)},$$

ou bien

$$\left[1 + \frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}\right]\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = \text{ ou } > \beta - \alpha.$$

Tels sont les deux caractères que l'on pourra appliquer au cas actuel, et qui coïncident avec les deux derniers (9) et (10), obtenus dans le cas précédent.

Prenons pour exemple l'équation

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 20x^3 + 3x^2 + 5x - 25 = 0.$$

Les coefficients de la transformée en $(x-1)$ seront

$$1 + 7 - 2 - 35 - 36 - 34.$$

Deux racines devront être cherchées entre 0 et 1. Le second caractère nous avertit de suite qu'elles sont imaginaires, puisqu'on a

$$1 + \frac{5}{36} > \frac{36}{34}.$$

Soit encore l'équation

$$f(x) = x^5 - 7x^4 - 16x^3 + 226x^2 - 571x + 448 = 0.$$

On aura pour les coefficients des transformées en $(x-2)$,

$$1 + 3 - 32 + 42 - 3 + 2;$$

pour les coefficients des transformées en $(x-3)$,

$$1 + 8 - 10 - 26 + 2 + 13.$$

On peut appliquer ici le premier caractère, puisque

$$1 + \frac{2}{3} > \frac{3}{2}.$$

Donc les deux racines indiquées entre 2 et 3 seront imaginaires.

Les applications précédentes suffisent pour éclaircir la théorie que nous venons d'exposer.

Lorsque les deux limites α et β ne sont pas encore assez rapprochées pour pouvoir en conclure l'imaginarité des racines, on prendra pour limite intermédiaire une valeur approchée α' de la racine de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

à laquelle on joindra celle des deux limites données qui correspond à la partie convexe de la courbe, de manière que les nouvelles limites ne comprennent aucun point d'inflexion, ce qui ramène la recherche au cas précédemment traité. La figure de la courbe indique d'ailleurs si la nouvelle limite α' doit surpasser ou non la valeur exacte de la racine susdite.

Il peut arriver, en outre, que l'arc de courbe présente deux points où la tangente devient parallèle à l'axe des x. Cette circonstance sera indiquée par une différence de deux variations dans les suites (α), (β), après avoir omis les derniers termes. Dans ce cas, il faudra appliquer la recherche à l'équation

$$f'(x) = 0,$$

contenant deux racines entre α et β. S'il en résulte que ces racines sont imaginaires, il en sera de même des deux racines de la proposée situées entre les limites données. Si, au contraire, elles sont réelles, la valeur intermédiaire γ, qui les aura séparées, donnera lieu à une nouvelle transformée en $(x - \gamma)$, laquelle étant combinée avec celle en $(x - \alpha)$ ou $(x - \beta)$, fera rentrer la recherche dans le cas où les deux caractères (9), (10) deviennent applicables.