JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Sur une propriété mécanique de la lemniscate, découverte par N. Fuss

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 28.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__28_0>

Sur une propriété mécanique de la lemniscate, découverte par N. Fuss;

PAR J.-A. SERRET.

Les Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg pour l'année 1824 renferment une Note, où Fuss s'occupe de rechercher quelle est la courbe qui jouit de la propriété, que ses arcs comptés à partir d'un point fixe soient parcourus dans le même temps que leurs cordes par un mobile pesant partant de l'état de repos, et il trouve, par une considération particulière et ingénieuse, que cette courbe est une lemniscate de paramètre arbitraire, dont l'axe fait un angle de 45 degrés avec la verticale, et dont le centre est au point fixe d'où part le mobile.

On peut arriver directement et d'une manière très-simple à ce résultat.

Si g désigne la pesanteur, t l'angle que fait avec la verticale le rayon vecteur r d'un point de la courbe, les temps employés par un même mobile à décrire successivement ce rayon vecteur et l'arc qu'il soutend, seront

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\, 2\sqrt{\frac{r}{\cos t}}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_0}^{t} \frac{\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{dt^2}}}{\sqrt{r \cos t}}\, dt,$$

t_0 étant la valeur de t correspondante à $r = 0$. Si l'on veut que le rapport de ces deux temps soit constant, en le désignant par α, on trouve, après une simple différentiation,

$$(\alpha^2 - 1)\cos^2 t \frac{dr^2}{dt^2} + 2\alpha^2 \sin t \cos t\, r \frac{dr}{dt} + (\alpha^2 \sin^2 t - \cos^2 t)\, r^2 = 0.$$

Cette équation est homogène par rapport à r et $\frac{dr}{dt}$; on pourra donc l'intégrer dans tous les cas. Si l'on suppose $\alpha = 1$, elle devient

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = \frac{\cos 2t}{\sin 2t},$$

d'où, en intégrant et désignant par a une constante arbitraire,

$$r^2 = 2a^2 \sin 2t;$$

ce qui démontre complétement le théorème de Fuss.