JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

**Note sur les flexions considérables des verges élastiques**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 9 (1844), p. 275-284.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__275_0>

# NOTE

## *Sur les flexions considérables des verges élastiques;*

Par M. DE SAINT-VENANT.

**1**. Navier a ramené aux quadratures (*Résumé des Leçons à l'École des Ponts et Chaussées*) la détermination des flexions très-petites prises par une verge élastique dont l'axe est une courbe plane quelconque, sous l'influence de forces qui ne changent nulle part le plan de la courbure. Il est possible d'y ramener également (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 30 octobre et 6 novembre 1843) la détermination des très-petites flexions et torsions d'une verge à double courbure ou dont le plan primitif de courbure s'est voilé.

Mais les verges peuvent prendre aussi des flexions considérables; on peut même quelquefois faire toucher leurs deux bouts primitivement éloignés, sans que pour cela leur élasticité soit altérée, et il est souvent utile de connaître ces flexions.

Les travaux d'Euler (*Nova methodus inveniendi lineas, etc., additamentum* DE CURVIS ELASTICIS) et les méthodes d'intégration des fonctions elliptiques vont nous fournir les moyens de les déterminer exactement dans un grand nombre de cas, et approximativement dans tous, en nous bornant toutefois, pour aujourd'hui, aux verges à simple courbure [*].

**2**. Supposons d'abord, 1° que les forces qui sollicitent la verge dans le plan de son axe n'agissent qu'isolément ou d'une manière discontinue; 2° que, dans une même portion finie de la verge, comprise

[*] Depuis que cette Note a été reçue au *Journal de Mathématiques*, M. Binet a donné, le 17 juin, et M. Wantzel, le 24 (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XVIII, pages 1115 et 1197), des intégrales pour le cas où une verge primitivement droite et cylindrique prend une forme à double courbure, mais sans pousser le calcul jusqu'aux formules propres aux applications, comme je me suis proposé surtout de le faire ici.

entre deux des points successifs où des forces exercent leur action (soit directement, soit par l'intermédiaire de leviers fixés à la verge), la section soit partout la même, et *l'axe soit une ligne droite ou un arc de cercle.*

Soient, après la flexion,

$x, y, \rho$ les coordonnées rectangulaires et le rayon de courbure de l'axe en un point d'une de ces portions finies;

$s$ la longueur de l'axe comptée jusqu'à ce point;

X, Y les composantes, parallèlement à $x$ et $y$, d'une des forces qui agissent entre cette portion et l'une des deux extrémités de la verge;

$x_1, y_1$ les coordonnées de son point d'application (situé sur la verge ou dehors, comme on vient de le dire);

$\Sigma$ l'indice de sommes relatives aux diverses forces dont on vient de parler.

Soient encore

$r$ le rayon de courbure avant la flexion;

$E$ un coefficient numérique dépendant de l'élasticité de la matière;

$\mu$ le moment d'inertie de la section transversale, autour d'un de ses deux axes principaux (on suppose cet axe de la section perpendiculaire au plan de courbure de l'axe de la verge, car, dans le cas contraire, le plan de courbure changerait par la flexion).

On aura, comme l'on sait, pour l'égalité des moments des forces extérieures et des forces intérieures agissant à travers la section en $(x, y)$,

$$(1) \qquad E\mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right) = \Sigma\left[\mathrm{Y}(x_1 - x) - \mathrm{X}(y_1 - y)\right].$$

Nous ne poserons pas d'autre équation d'équilibre, parce que nous négligerons, aujourd'hui, l'effet des contractions ou dilatations longitudinales de l'axe de la verge, et des glissements transversaux de ses tranches.

Comme $E$, $\mu$, $r$ sont supposés constants ou indépendants de $x, y$, ainsi que les valeurs de X, Y, $x_1$, $y_1$ relatives à chaque force, l'équation précédente se réduira à la forme

$$\frac{1}{\rho} = ax + by + c, \qquad (2)$$

$a$, $b$, $c$ étant trois constantes.

Cette équation différentielle s'intégrerait immédiatement comme linéaire si l'on pouvait y remplacer $\frac{1}{\rho}$ par $\frac{d^2y}{dx^2}$. Navier, par cette substitution, a pu déterminer les flexions d'une verge rectiligne dans les cas où les déplacements de ses points, assez grands pour qu'il faille en tenir compte dans le moment des forces extérieures, sont cependant assez petits pour ne donner qu'une courbure très-faible à l'axe, en sorte qu'on puisse remplacer, dans le calcul, l'élément courbe $ds$ par sa projection $dx$.

Mais nous ne supposons pas, dans ce qui va suivre, qu'une pareille substitution puisse se faire. Il faut donc, sans y recourir, trouver l'intégrale générale de l'équation (2).

**3.** Pour cela, observons que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{dx} d.\frac{dy}{ds}, \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{dy} d.\frac{dx}{ds}.$$

Si donc le second membre de l'équation (2) ne contenait que $x$ ou que $y$, une première intégration serait immédiatement possible.

Or, pour réduire ainsi l'équation (2), il n'y a qu'à transformer les coordonnées $x$, $y$ en d'autres $x'$, $y'$, ayant la même origine, ou qu'à poser

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \qquad (3)$$

En substituant dans l'équation (2), l'expression de l'inverse $\frac{1}{\rho}$ du rayon de courbure sera la même en fonction des coordonnées nouvelles qu'elle était en fonction des anciennes. Si donc l'on égale à zéro le coefficient de $y'$ du second membre, ou si l'on pose

$$-a \sin\alpha + b \cos\alpha = 0, \quad \text{tang}\,\alpha = \frac{b}{a},$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

l'équation transformée sera

$$\frac{1}{dx'}\,d.\frac{dy'}{ds} = x'\sqrt{a^2+b^2} + c. \tag{4}$$

Elle a pour intégrale première, en appelant $\eta$ la valeur de $\frac{dy'}{ds}$ pour $x' = 0$,

$$\frac{dy'}{ds} = \frac{x'^2}{2}\sqrt{a^2+b^2} + cx' + \eta. \tag{5}$$

La transformation de coordonnées qui nous a donné le moyen d'intégrer a consisté à prendre l'axe des $y'$ parallèle à la *résultante* de toutes les forces qui se trouvent en jeu pour plier la partie de la verge que l'on considère, car on a $\frac{b}{a} = -\frac{\Sigma Y}{\Sigma X}$; aussi l'idée s'en trouvait implicitement dans le Mémoire précité d'Euler, qui considère une lame sollicitée de diverses manières par une seule force et qui prend toujours l'un des deux axes coordonnés parallèle à la direction de cette force.

On tire de l'équation (5),

$$\frac{dx'}{ds} = \sqrt{1 - \frac{dy'^2}{ds^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{x'^2}{2}\sqrt{a^2+b^2} + cx' + \eta\right)^2},$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} ds &= \frac{dx'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x'^2}{2}\sqrt{a^2+b^2} + cx' + \eta\right)^2}},\\ dy' = \frac{dy'}{ds}\,ds &= \frac{\left(\frac{x'^2}{2}\sqrt{a^2+b^2} + cx' + \eta\right)dx'}{\sqrt{1 - \left(\frac{x'^2}{2}\sqrt{a^2+b^2} + cx' + \eta\right)^2}}; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

et la détermination de la courbe qu'affecte la portion de la verge après sa flexion dans l'état d'équilibre est ramenée, comme on le voit, aux quadratures [*].

---

[*] De même, toute équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}\,\mathrm{f}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x, y)$$

sera susceptible d'une première intégration si le second membre est fonction d'une ex-

4. Euler écrivait en 1744 que les expressions telles que l'équation (6) ne s'intégraient pas sous forme finie. Nous sommes aujourd'hui assez heureux pour pouvoir en écrire et en donner numériquement les intégrales au moyen des notations et des tables des fonctions dites elliptiques. Auparavant, mettons-les, comme Euler, sous une autre forme. D'abord, en faisant

$$(7)\qquad x' = x'' - \frac{C}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

le terme en $x'$ disparaît. Cette deuxième transformation de coordonnées se réduit à prendre pour axe des $y'$ la direction même de la résultante des forces.

Ensuite, faisons cette résultante

$$(8)\qquad \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2} = P; \quad \text{et} \quad \frac{E\mu}{P}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Décomposons, ensuite, la quantité sous le radical en ses deux fac-

---

pression du premier degré en $x$, $y$, ou de toute autre expression (et il y en a une foule) dont l'une des deux variables puisse disparaître en faisant $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$. En effet, la substitution lui donnera cette forme, en représentant $\frac{dy'}{dx'}$ par $p'$,

$$\frac{dp'}{(\cos\alpha - p'\sin\alpha)^3}\cdot f\left(\frac{\sin\alpha + p'\cos\alpha}{\cos\alpha - p'\sin\alpha}\right) = dx'\, f(x'),$$

équation dont les deux membres peuvent s'intégrer par les quadratures.

Et l'on opérera aussi la deuxième intégration par les quadratures si, après la première, l'équation est résoluble par rapport à $p'$. C'est ce qui arrive dans notre cas particulier $f\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$. *Alors $\alpha$ disparaît du premier membre*, et l'on obtient l'intégrale seconde

$$y' = \int dx' \frac{\int dx'\, f(x')}{\sqrt{1 - [\int dx'\, f(x')]^2}}.$$

On sait que beaucoup d'autres équations différentielles compliquées s'intègrent facilement par des transformations du genre des changements de coordonnées.

teurs

$$1 - \frac{x''^2}{2p^2} - \eta + \frac{c^2p^2}{2}, \quad 1 + \frac{x''^2}{2p^2} + \eta - \frac{c^2p^2}{2},$$

et faisons

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2p^2(1-\eta) + c^2p^4 = \mathrm{f}^2, \quad \text{d'où} \\ & \eta = 1 + \frac{c^2p^2}{2} - \frac{\mathrm{f}^2}{2p^2} = 1 + \frac{c^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{\mathrm{f}^2}{2}\sqrt{a^2+b^2}, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire remplaçons la constante $\eta$ par une nouvelle constante f. Les deux expressions différentielles deviendront

$$(10) \quad ds = \frac{2p^2\,dx''}{\sqrt{(\mathrm{f}^2 - x''^2)(4p^2 - \mathrm{f}^2 + x''^2)}}, \quad dy' = \frac{(2p^2 - \mathrm{f}^2 + x''^2)\,dx''}{\sqrt{(\mathrm{f}^2 - x''^2)(4p^2 - \mathrm{f}^2 + x''^2)}}.$$

La quantité f joue un rôle important dans la discussion des courbes qu'elles représentent; elle est évidemment la plus grande valeur de l'abscisse $x''$, positivement ou négativement : c'est la flèche de courbure quand la verge était primitivement droite et pressée dans le sens de son axe. Les courbes, en général festonnées, sont comprises entre les deux droites parallèles $x'' = \mathrm{f}$, $x'' = -\mathrm{f}$.

5. Legendre donne (*Traité*, chap. III) deux manières de transformer les expressions comme les équations (10), en différentielles dont les intégrales soient les fonctions elliptiques de première et de deuxième espèce, qu'il désigne ainsi :

$$\mathrm{F}(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \quad \mathrm{E}(k, \varphi) = \int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}.$$

La première manière, qui donne pour $ds$ une transformée négative, consiste à faire

$$x'' = k\cos\psi, \quad \text{d'où} \quad \psi = \arccos\frac{x''}{\mathrm{f}}.$$

La deuxième manière, qui donne une transformée positive, consiste à prendre

$$x''^2 = \mathrm{f}^2\frac{(4p^2 - \mathrm{f}^2)\sin^2\varphi}{4p^2 - \mathrm{f}^2\sin^2\varphi}, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \arcsin\frac{2px''}{\mathrm{f}\sqrt{4p^2 - \mathrm{f}^2 + x''^2}}.$$

On obtient ainsi

$$ds = \frac{-p\,d\psi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\psi}},$$

$$dy = \frac{-p\left(1-\frac{f^2}{2p^2}\sin^2\psi\right)d\psi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\psi}} = \frac{p\,d\psi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\psi}} - 2p\,d\psi\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\psi},$$

et

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi}},$$

$$dy = p\,\frac{1-\frac{f^2}{4p^2}+\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi}{\left(1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{p\,d\varphi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi}} + 2p\left(1-\frac{f^2}{4p^2}\right)\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{p\,d\varphi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi}} + 2p\,d\varphi\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi} - \frac{f^2}{2p}\,d\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}\sin^2\varphi}}\right).$$

Donc, $C$, $C'$, $C_1$, $C'_1$ représentant des constantes arbitraires, on a, par la transformée en $\psi$,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} s &= C + pF\left(\frac{f}{2p}, \operatorname{arc\,cos}\frac{x''}{f}\right),\\ y' &= -s + C' - 2pE\left(\frac{f}{2p}, \operatorname{arc\,cos}\frac{x''}{f}\right); \end{aligned}\right.$$

et, par la transformée en $\varphi$,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} s &= C_1 + pF\left(\frac{f}{2p}, \operatorname{arc\,sin}\frac{x''}{f\sqrt{1-\frac{f^2-x''^2}{4p^2}}}\right),\\ y' &= -s + C'_1 - \frac{x''\sqrt{f^2-x''^2}}{2p\sqrt{1-\frac{f^2-x''^2}{4p^2}}} + 2pE\left(\frac{f}{2p}, \operatorname{arc\,sin}\frac{x''}{\sqrt{1-\frac{f^2-x''^2}{4p^2}}}\right). \end{aligned}\right.$$

Et comme les angles $\psi$, $\varphi$ sont liés par tang $\psi$ tang $\varphi\sqrt{1-\frac{f^2}{4p^2}}=1$, les théorèmes connus sur les fonctions elliptiques complémentaires donnent ces deux relations entre les constantes de l'équation (12) et celles de l'équation (11):

$$C_1 = C - pF\left(\frac{f}{2p}, \frac{\pi}{2}\right), \quad C'_1 = C' - 2pE\left(\frac{f}{2p}, \frac{\pi}{2}\right).$$

**6.** En remplaçant $p$, $x''$, $y'$ par leurs valeurs

$$(13)\qquad p = \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}}, \quad x'' = x' + cp^2 = \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y' = \frac{ay-bx}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

on a, pour intégrale première de l'équation différentielle (2), ou de

$$(14)\qquad \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dx\,d^2y}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} = ax + by + c,$$

celle (5), ou

$$(15)\qquad \frac{d(ay-bx)}{ds} = \frac{1}{2}(ax+by+c)^2 + \sqrt{a^2+b^2} - \frac{1}{2}f^2(a^2+b^2),$$

et, pour intégrale seconde, d'après les expressions (11),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} s &= C - \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}}F\left[\frac{f}{2}(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}},\ \operatorname{arc\,cos}\frac{ax+by+c}{f\sqrt{a^2+b^2}}\right],\\ \frac{ay-bx}{\sqrt{a^2+b^2}} &= -s + C' - \frac{2}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}}E\left[\frac{f}{2}(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}},\ \operatorname{arc\,cos}\frac{ax+by+c}{f\sqrt{a^2+b^2}}\right]. \end{aligned}\right.$$

Les expressions (12) fourniraient, par la substitution, une intégrale d'une autre forme, que nous n'écrirons pas.

**7.** Puisque la verge est composée, par hypothèse, de parties droites ou circulaires d'une section constante, dont tous les points sont sollicités à fléchir par les mêmes forces appliquées hors de chaque partie, on pourra employer successivement, pour chacune, les formules qu'on vient de donner; chaque point de la courbe d'axe nouvelle répondra au point de la courbe d'axe ancienne pour lequel l'arc $s$ a la même longueur, à partir d'une extrémité, car on a supposé (n° **2**) que l'axe n'éprouvait ni contraction ni dilatation. On assujettira donc les longueurs des diverses parties à être restées égales aux longueurs primitives; on assujettira aussi les axes des parties consécutives à avoir des coordonnées communes et une tangente commune aux points de jonction : de cette manière les intégrales premières (15) et les intégrales secondes (16) fourniront, et les valeurs des constantes f, C, C′ ou $C_1$, $C'_1$, et les coordonnées nouvelles d'un point quelconque de la verge, répondant à un point donné sur cette verge avant sa flexion, ce qui sera la solution complète du problème proposé.

**8.** Maintenant, supposons que la verge élastique affecte primitivement la forme d'une courbe plane quelconque, que sa section soit variable comme sa courbure, enfin que, parmi les forces sollicitantes, il y en ait qui agissent d'une manière continue ou en tous les points de la verge, en sorte que la résultante qui produit le moment de flexion varie aussi d'un point à l'autre.

Ces circonstances rendront généralement impossibles les intégrations ci-dessus, et le problème de la flexion ne sera résoluble alors que par des méthodes d'approximation.

Mais en voici une qui n'exige pas d'autres calculs que ceux des articles précédents, et qui suffira ordinairement.

Supposons que l'on ait divisé la verge en un nombre suffisant de parties pour que, dans chacune, le rayon de courbure primitif, la section et la résultante des forces puissent être regardées comme sensiblement constantes, on peut appliquer à chacune les équations ci-dessus. Mais on peut faire mieux : on peut, en posant

$$\frac{1}{\rho} = ax + by + c,$$

ou en regardant l'équation de son axe comme représentée, après la flexion, par la formule intégrale (16), disposer des trois indéterminées $a$, $b$, $c$ pour qu'en trois points de cette partie, savoir, aux deux extrémités et au milieu, le trinôme $ax + by + c$ ait bien la valeur qu'il doit avoir d'après l'équation (2) comparée à l'équation (1), c'est-à-dire qu'il soit égal *au quotient des moments des forces par* E$\mu$, *augmenté de l'inverse* $\frac{1}{r}$ *du rayon de courbure primitif en chaque point.*

De cette manière, la courbure nouvelle $\frac{1}{\rho}$ sera ce qu'elle doit être à ces trois points (sauf ce qui résulte d'une différence insensible sur le moment des forces), et, dans tout le reste de chaque partie, elle aura une valeur extrêmement approchée de sa valeur véritable, puisque celle-ci varie d'une manière continue et qu'il en est de même de la fonction du premier degré $ax + by + c$ des coordonnées nouvelles.

On conçoit que l'on pourrait représenter aussi cette quantité par un polynôme d'un degré supérieur au premier, et composé de manière que la transformation des coordonnées du n° **3** puisse le réduire à ne contenir qu'une seule des deux coordonnées nouvelles : de cette manière on pourrait poser la condition d'égalité en plus de trois points de chaque partie, puisqu'on aurait plus de trois coefficients à déterminer. Mais on pense que le trinôme $ax + by + c$ donnera des approximations suffisantes, que l'on peut d'ailleurs rendre aussi grandes qu'on veut, et dont on peut même apprécier le degré jusqu'à un certain point, en comparant les résultats d'une subdivision de la verge à ceux d'une subdivision plus grande.

L'emploi des formules de l'art. **6** suffira donc, on le croit, pour les besoins de la pratique dans le cas général, comme dans le cas particulier par lequel nous avons commencé.