JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WILLIAM THOMSON

Note sur la théorie de l'attraction

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 239-244.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__239_0>

NOTE

SUR LA THÉORIE DE L'ATTRACTION;

PAR M. WILLIAM THOMSON.

C'est un théorème connu que, si s est une surface quelconque renfermant dans son intérieur une masse m de matière, attirante suivant le carré inverse de la distance, il y a une distribution déterminée d'une quantité de matière égale à m, sur la surface s, telle qu'elle exercera sur les points en dehors de s la même attraction que m.

Si s est une des *surfaces d'équilibre* relatives à m, ou une surface en dehors de m à laquelle l'attraction de m soit partout perpendiculaire, la distribution de matière sur s qui exerce sur les points extérieurs la même attraction que m, est connue.

En effet, soit R l'attraction de m sur une unité de matière en un point P de la surface s. La quantité de matière qui correspond à l'élément ds de la surface, situé en P, est

$$\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{R}\,ds,$$

comme on le prouve facilement.

Je me propose ici de montrer que la distribution de matière sur s, qui exerce la même attraction que m sur les points extérieurs, peut être déterminée dans une classe beaucoup plus générale de cas, que celui où s est une surface d'équilibre.

En effet, soient m_1 une masse posée arbitrairement à côté de m, U le *potentiel* (suivant la définition de M. Gauss) des deux masses en un point quelconque P. Soit s une surface fermée, renfermant dans son intérieur toute la masse m, mais aucune partie de la masse m_1, et telle que U ait une valeur constante (U) dans toute son étendue. Cela étant, je vais démontrer que, si de la matière est distribuée sur s, de telle manière que la quantité sur un élément ds, situé en P, soit

$$\frac{1}{4\pi} \mathrm{R} ds,$$

R représentant l'attraction de m et m_1 sur une unité de matière en P, l'attraction de la matière ainsi répartie sera, quant aux points extérieurs, la même que celle de m, et quant aux points intérieurs, la même que celle de m_1, mais dirigée en sens contraire.

On doit remarquer que l'ensemble de s, et d'une autre surface fermée s_1, renfermant dans son intérieur m_1, sera la surface complète d'équilibre relative aux masses m et m_1, et que si de la matière est distribuée sur s_1 suivant la même loi que celle de la distribution de la matière sur s, l'attraction totale des deux surfaces sera zéro sur les points intérieurs, et la même que celle de m et m_1 sur les points extérieurs.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point attiré P, et soient v et v_1 les potentiels de m et m_1 en P, de sorte que

$$\mathrm{U} = v + v_1. \tag{1}$$

Soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque P' sur la surface s, et R', U', v', v'_1, les valeurs de R, U, v, v_1 en ce point. Soient de plus ds' un élément de la surface s, situé en P', et Δ la distance de P' à P, en sorte que

$$\Delta = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

En désignant par u le potentiel en P, de la matière distribuée sur s, ou de la *surface matérielle* s, on aura

$$u = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathrm{R}\, ds}{\Delta}. \tag{3}$$

Or, X', Y', Z' étant les composantes de R', parallèles aux trois axes des x, y, z, et α', β', γ' les angles que fait avec ces axes la direction de R', ou une normale à la surface s en P', on aura

$$\mathrm{R}' = \mathrm{X}' \cos\alpha' + \mathrm{Y}' \cos\beta' + \mathrm{Z}' \cos\gamma'.$$

De plus, puisque R′ est l'attraction de m et m_1 en P′,

$$-X' = \frac{dv'}{dx'} + \frac{dv'_1}{dx'}, \qquad -Y' = \frac{dv'}{dy'} + \frac{dv'_1}{dy'}, \qquad -Z' = \frac{dv'}{dz'} + \frac{dv'_1}{dz'};$$

d'où l'équation (3) devient

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{4\pi}\iint\frac{ds'}{\Delta}\left[\begin{array}{r}\left(\frac{dv'}{dx'} + \frac{dv'_1}{dx'}\right)\cos\alpha' + \left(\frac{dv'}{dy'} + \frac{dv'_1}{dy'}\right)\cos\beta' \\ + \left(\frac{dv'}{dz'} + \frac{dv'_1}{dz'}\right)\cos\gamma'\end{array}\right] \\ &= -\frac{1}{4\pi}\iint\frac{1}{\Delta}\left[\begin{array}{r}\left(\frac{dv'}{dx'} + \frac{dv'_1}{dx'}\right)dy'\,dz' + \left(\frac{dv'}{dy'} + \frac{dv'_1}{dy'}\right)dz'\,dx' \\ + \left(\frac{dv'}{dz'} + \frac{dv'_1}{dz'_1}\right)dx'\,dy'\end{array}\right].\end{aligned}$$

Dans ces intégrations, il faut choisir les limites de manière à comprendre tous les points de la surface s.

Or, on a

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{dv'}{dx'} + \frac{dv'_1}{dx'}\right) = \int dx'\left[\frac{1}{\Delta}\left(\frac{d^2v'}{dx'^2} + \frac{d^2v'_1}{dx'^2}\right) + \frac{d}{dx'}\frac{1}{\Delta}\cdot\left(\frac{dv'}{dx'} + \frac{dv'_1}{dx'}\right)\right],$$

et des transformations semblables s'appliquent aux autres termes de l'expression de u. Par conséquent,

$$u = -\frac{1}{4\pi}\iiint dx'dy'dz'\left[\begin{array}{c}\frac{1}{\Delta}\left(\frac{d^2v'}{dx'^2} + \frac{d^2v'}{dy'^2} + \frac{d^2v'}{dz'^2} + \frac{d^2v'_1}{dx'^2} + \frac{d^2v'_1}{dy'^2} + \frac{d^2v'_1}{dz'^2}\right) \\ + \frac{d}{dx'}\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{d}{dx'}(v'+v'_1) + \frac{d}{dy'}\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{d}{dy'}(v'+v'_1) + \frac{d}{dz'}\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{d}{dz'}(v'+v'_1)\end{array}\right],$$

où les intégrales comprennent tout l'espace intérieur à la surface s.

Or, pour tous les points dans cet espace, on a

$$\frac{d^2v'_1}{dx'^2} + \frac{d^2v'_1}{dy'^2} + \frac{d^2v'_1}{dz'^2} = 0,$$

$$\frac{d^2v'}{dx'^2} + \frac{d^2v'}{dy'^2} + \frac{d^2v'}{dz'^2} = -4\pi\rho',$$

ρ' étant la densité de la matière de m au point (x', y', z'), quantité qu'il faut prendre égale à zéro, quand (x', y', z') n'est pas un point de m.

Maintenant, v étant le potentiel de m en P, on a

$$\int\int\int \rho' \frac{dx'\, dy'\, dz'}{\Delta} = \mathrm{U}.$$

Par conséquent l'expression de u devient

$$u = \mathrm{U} - \frac{1}{4\pi}\int\int\int dx'\, dy'\, dz' \left[\begin{array}{c} \frac{d}{dx'}\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{d}{dx'}(v'+v'_1) \\ +\frac{d}{dy'}\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{d}{dy'}(v'+v'_1) + \frac{d}{dz'}\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{d}{dz'}(v'+v'_1) \end{array}\right] = \mathrm{U} - h,$$

en représentant, pour abréger, l'intégrale triple par h. Si l'on intègre chaque terme de cette intégrale par parties, il vient

$$h = \frac{1}{4\pi}\int\int(v'+v'_1)\left(\frac{d}{dx'}\frac{1}{\Delta}\cdot dy'dz' + \frac{d}{dy'}\frac{1}{\Delta}.dz'dx' + \frac{d}{dz'}\frac{1}{\Delta}.dx'dy'\right)$$
$$- \frac{1}{4\pi}\int\int\int dx'\, dy'\, dz'\,(v'+v'_1)\left(\frac{d^2}{dx'^2}\frac{1}{\Delta} + \frac{d^2}{dy'^2}\frac{1}{\Delta} + \frac{d^2}{dz'^2}\frac{1}{\Delta}\right).$$

où les intégrales doubles comprennent toute la surface s, et les intégrales triples tout l'espace intérieur, comme auparavant. Mais $v + v'_1$ a une valeur constante (U) pour toute la surface s. Par conséquent, le premier terme de h prend la forme

$$\frac{1}{4\pi}(\mathrm{U})\int\int\left(\frac{d}{dx'}\frac{1}{\Delta}.dy'dz' + \frac{d}{dy'}\frac{1}{\Delta}.dz'dx' + \frac{d}{dz'}\frac{1}{\Delta}.dx'dy'\right),$$

ce qui, comme on le démontre facilement, a la valeur

$$0 \quad \text{ou} \quad -(\mathrm{U}),$$

selon que P est en dehors ou en dedans de s.

De plus l'on a

$$\frac{d^2}{dx'^2}\frac{1}{\Delta} + \frac{d^2}{dy'^2}\frac{1}{\Delta} + \frac{d^2}{dz'^2}\frac{1}{\Delta} = 0,$$

quand la distance PP′ n'est pas infiniment petite. Par conséquent, quand P est en dehors de s, le second terme de h disparaît. Si P est en dedans de s, tous les éléments de l'intégrale, pour lesquels PP′ n'est pas infiniment petit, s'évanouissent; donc l'intégrale a la même valeur que si $v' + v'_1$ avait partout la valeur $v + v_1$, qui correspond au point P. Ainsi le second terme de h est égal à

$$-\frac{v+v_1}{4\pi}\int\int\int dx'\,dy\,dz'\left(\frac{d^2}{dx'^2}\frac{1}{\Delta}+\frac{d^2}{dy'^2}\frac{1}{\Delta}+\frac{d^2}{dz'^2}\frac{1}{\Delta}\right),$$

ou à

$$-\frac{v+v_1}{4\pi}\int\int\left(\frac{d}{dx'}\frac{1}{\Delta}.dy'\,dz'+\frac{d}{dy'}\frac{1}{\Delta}.dz'\,dx'+\frac{d}{dz'}\frac{1}{\Delta}.dx'\,dy'\right),$$

ce qui, comme ci-dessus, est égal à

$$v+v_1,$$

puisque, dans le cas que nous considérons, P est en dedans de s.

Ainsi on trouve

$$h=0,\quad \text{quand P est extérieur,}$$

$$h=-(\mathrm{U})+v+v_1,\quad \text{quand P est intérieur;}$$

d'où

$$u=v,\quad \text{dans le premier cas,}$$

$$u=(\mathrm{U})-v_1,\quad \text{dans le second cas.}$$

Par conséquent, v, v_1 et u étant les valeurs en P des potentiels de m, m_1 et s, il suit que quand P est en dehors de s, l'attraction de s sur P est égale à celle de m, et quand P est en dedans de s, l'attraction de s sur ce point est égale à celle de m_1, mais dirigée en sens contraire, ce qu'il s'agissait de prouver.

On aurait pu prévoir cette conclusion en se rappelant les trois théorèmes suivants :

1°. Si une quantité de matière égale à $m+m_1$ est distribuée sur s et s_1, de telle manière que la *densité* de la distribution aux divers points de ces surfaces soit proportionnelle à l'attraction de m et m_1 dans ces points, l'attraction de s et s_1 sera zéro sur les points intérieurs, et égale à celle de m et m_1 sur les points extérieurs.

2°. Il n'y a qu'une seule distribution de la même quantité de matière, sur s et s_1, qui n'exerce aucune attraction sur les points intérieurs.

3°. Il est possible de trouver une distribution d'une quantité de matière égale à m, sur s, telle qu'elle exerce sur les points en dehors de s

la même attraction que m, et une distribution d'une quantité de matière égale à m_1, sur s_1, qui exerce sur les points en dehors de cette surface la même attraction que m_1.

Ces théorèmes ont été démontrés pour la première fois par M. Gauss; mais il n'a démontré le second que dans le cas où la surface considérée est une seule surface fermée. L'extension de ce théorème au cas d'un nombre quelconque de surfaces disjointes est due à M. Liouville.

Ces théorèmes suffisent pour en conclure le théorème qui forme l'objet de cette Note, mais j'ai préféré la démonstration directe donnée ci-dessus.

(Glascow, 15 décembre 1843.)