JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AUGUSTE MIQUEL

Mémoire de géométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 20-27.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__20_0>

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE,

PAR M. AUGUSTE MIQUEL,

Professeur de Mathématiques au Collége de Castres.

§ I^er.

1. Lorsque deux courbes se rencontrent, l'angle sous lequel elles se coupent se mesure par l'angle que forment entre elles les deux tangentes menées à chacune de ces lignes au point de leur intersection. Cet angle peut encore être considéré indépendamment des deux tangentes comme formé par l'intersection de deux éléments de ces courbes; ainsi, dans un espace infiniment petit, autour de l'intersection de deux lignes quelconques, l'angle curviligne ne diffère nullement d'un angle rectiligne. Il existe donc entre les quatre angles formés par deux lignes qui se coupent d'une manière quelconque dans l'espace, les mêmes relations qu'entre les quatre angles de deux droites qui se coupent. Si l'un des angles formés au point d'intersection des deux courbes est droit, les trois autres le sont aussi et les courbes se coupent orthogonalement.

2. Si plusieurs lignes comprises dans un plan se coupent en un même point, il existe encore entre tous les angles formés les mêmes relations qu'entre des angles rectilignes. Ces relations subsistent également si les courbes, au lieu d'être sur un plan, se trouvent seulement sur une même surface courbe; car, en prenant autour du point d'intersection une surface infiniment petite, on peut la considérer comme plane. On doit exclure de tout ceci les points et les arêtes de rebroussement.

3. Lorsque deux courbes se coupent sur un même plan, l'angle des deux normales menées au point de leur intersection, étant égal à l'angle des deux tangentes, est par conséquent égal à l'angle des deux courbes. Il résulte de là que l'angle de deux circonférences de cercle qui se coupent sur un même plan est égal à l'angle des deux rayons qui aboutissent tous deux à un des deux points d'intersection, pourvu qu'on prenne pour l'angle des circonférences, parmi les quatre qu'elles forment à ce point, un angle dont les côtés soient tous deux dirigés dans le même sens à partir du point d'intersection; tous deux de gauche à droite par exemple, au-dessus de la ligne des centres.

4. Dans la suite de ce Mémoire, lorsque nous désignerons un angle par une seule lettre, on devra prendre parmi tous ceux qui pourraient avoir même sommet, celui entre les côtés duquel la lettre se trouve immédiatement comprise, ou, selon le sens du discours, tout autre angle qui lui aura été reconnu égal. Nous désignerons encore une ligne, une surface par un certain nombre de points par lesquels elle passe. Ces lignes, ces surfaces ne seront tracées que lorsque leur présence sera jugée utile à la clarté de la démonstration. Elles ne se trouveront déterminées que lorsqu'elles seront désignées par un nombre suffisant de points déjà déterminés. Ainsi a, b, c, d étant des points connus, sphère $abcd$ sera une sphère entièrement déterminée; tandis que par sphère a, b nous désignerons une des sphères qui passent par les points a et b; par sphère a, b, c une de celles qui passent par les points a, b, c. Si l'on écrit qu'on a sphère $abghl$, on indiquera que g, h, l sont des points qui se trouvent sur une même surface sphérique passant par les points a et b. Pareillement les expressions cercle $abcd\ldots$, droite $abcd\ldots$ indiqueront que les points a, b, c, $d\ldots$ sont sur une même circonférence de cercle, sur une même droite. Il est clair que si l'on a à la fois plan $abcd\ldots$, plan $a'bcd\ldots$, il en résultera droite b, c, $d\ldots$; pareillement de sphère $abcde\ldots$, sphère $a'bcde\ldots$, résultera cercle $bcde\ldots$. Les circonférences et les sphères pourront encore être désignées par la lettre qui se trouve à leur centre.

Ces notions préliminaires étant établies, nous allons exposer quelques propositions relatives aux angles curvilignes. La considération de ces angles peut en effet être quelquefois utile dans la recherche ou l'exposition des propriétés des courbes, en remplaçant des constructions compliquées.

5. *Soient deux cercles* O *et* O′, *fig.* 1, *Pl. I, qui se coupent aux points* A *et* A′; *soient pris à volonté sur chacune de leurs circonférences les points* B *et* B′. *Soient* C *et* C′ *les centres des circonférences* BAB′, BA′B′. *L'angle* CBC′ *formé par les rayons des deux dernières circonférences est égal à l'angle* OAO′ *formé par les rayons des deux premières; et par suite les deux dernières circonférences se coupent sous le même angle que les deux premières.*

En effet, on a

$$\text{angle } CBC' = ABA' - CBA - C'BA',$$

ou bien

$$CBC' = ABA' - CAB - C'A'B;$$

on aura pareillement,

$$CB'C' = AB'A' - CAB' - C'A'B'$$

ajoutant terme à terme les deux égalités précédentes, on trouve

$$2CBC' = ABA' + AB'A' - BAB' - BA'B'.$$

Considérant maintenant les angles rectilignes qui ont leur sommet en A et A′, on a

$$OAO' = OAB' + O'AB - BAB',$$

ou bien

$$OAO' = OB'A + O'BA - BAB';$$

on trouve de même,

$$OA'O' = OB'A' + O'BA' - BA'B';$$

ajoutant membre à membre les deux dernières inégalités, on a

$$2OAO' = AB'A' + ABA' - BAB' - BA'B'.$$

Or cette valeur de $2OAO'$ n'est autre chose que celle qui a été trouvée pour $2CBC'$; donc

$$OAO' = CBC'.$$

D'après ce qui a été dit dans le n° **3**, il résulte de là que les deux circonférences C et C′ se coupent sous le même angle que les circonférences O et O′. Ce qu'il fallait démontrer.

Du théorème précédent se déduit le suivant, comme cas particulier.

6. *Lorsque deux circonférences de cercle se coupent orthogonalement, si l'on mène deux autres circonférences qui passent chacune par un des points d'intersection des deux premières et toutes deux par deux autres points pris respectivement sur chaque circonférence, elles se couperont aussi orthogonalement en ces deux points.*

Toute ligne droite pouvant être considérée comme une circonférence de cercle infiniment grande, du théorème précédent on déduit le suivant.

7. *Si l'on prend à volonté un point sur le diamètre d'un cercle, ou sur son prolongement, et un point sur la circonférence, les deux circonférences de cercle qui passeront toutes deux par ces deux points et chacune par une des deux extrémités du diamètre, se couperont toujours orthogonalement.*

Comme le point pris sur le prolongement du diamètre peut être supposé à l'infini, il en résulte cette proposition connue, que tous les angles inscrits à la demi-circonférence sont droits.

8. *Lorsque quatre circonférences de cercle se coupent consécutivement deux à deux sur une même circonférence de cercle, leurs quatre autres points d'intersection se trouvent aussi sur une même circonférence de cercle.*

Soient les quatre circonférences AA′B′B, BB′C′C, CC′D′D, DD′A′A, *fig.* 2, qui se coupent sur une même circonférence ABCD, je dis que les quatre points A′B′C′D′ sont aussi sur une même circonférence de cercle. En effet, puisque dans tout quadrilatère inscrit au cercle, la somme de deux angles opposés est égale à deux angles droits, nous avons

$$\text{angle } A'AB = 2d - A'B'B,$$
$$\text{angle } C'CB = 2d - C'B'B.$$

Ajoutant membre à membre, on a

$$A'AB + C'CB = A'B'C';$$

on obtiendrait de même

$$A'AD + C'CD = A'D'C'.$$

Ajoutant membre à membre les deux dernières égalités, il vient

$$BAD + DCB = A'B'C' + A'D'C'.$$

Or puisque les quatre points A, B, C, D sont sur une même circonférence de cercle, on a

$$BAD + DCB = 2d;$$

donc on aura aussi

$$A'B'C' + A'D'C' = 2d.$$

Ce qui nous apprend que les quatre points A'B'C'D' sont situés sur une même circonférence de cercle.

9. *Lorsque trois circonférences de cercle* PAB, PBC, PCA, *fig.* 3, *se coupent en un même point* P, *la somme des trois angles du triangle curviligne* ABC *égale deux angles droits.*

En effet, l'angle B de ce triangle est égal à son symétrique NPR; l'angle A égal à son opposé par le sommet MAN, est par conséquent égal à l'angle MPN symétrique de ce dernier. De même, l'angle C égale l'angle RPS. Donc la somme des trois angles du triangle ABC, étant égale à la somme des trois angles MPN, NPR, RPS formés autour du point P d'un même côté de la ligne MPS, est égale à deux angles droits.

10. Réciproquement, *si la somme des trois angles du triangle curviligne* ABC, *formé par trois circonférences de cercle qui se coupent aux points* A, B, C, *est égale à deux angles droits, les trois circonférences se coupent en un même point.*

En effet, si la circonférence AC ne passait pas par le point P d'intersection des deux circonférences AB et BC, on pourrait mener par les trois points DAC une autre circonférence qui fournirait avec les arcs AB et BC un autre triangle curviligne dont la somme des trois angles serait évidemment plus grande ou plus petite que la somme des angles du premier triangle curviligne ABC. D'un autre côté, l'une de ces deux sommes égale deux droits, par hypothèse, et l'autre égale aussi deux droits, d'après la proposition précédente; donc elles seraient égales entre elles, ce qui est absurde. Donc les trois circonférences AC, AB, BC se coupent en un même point.

§ II.

11. La proposition **9** peut évidemment s'énoncer ainsi qu'il suit: Trois points A, B, C étant donnés, si l'on prend à volonté sur leur plan un quatrième point P, la somme des trois angles du triangle curviligne ABC, formé par les trois circonférences PAB, PAC, PBC, sera égale à deux angles droits.

Si le point P est pris à l'infini sur le plan ABC, les trois arcs de circonférences AB, AC, BC se réduisent à des lignes droites. Nous retombons sur ce théorème connu : *La somme des trois angles d'un triangle rectiligne quelconque* ABC *est toujours égale à deux angles droits.*

De la proposition **9** résulte évidemment le théorème suivant: *La somme de tous les angles intérieurs d'un polygone curviligne dont les côtés sont des arcs de cercle qui passent tous par un même point* P, *est égale à autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés moins deux.*

12. *Soit* I *un point quelconque ; soit décrit à partir d'un autre point* A *l'arc de cercle* AI *qu'on prolonge jusqu'au point* E; *soient pareillement décrits les arcs* EIB, BIF, FIC, CIG, GID, DIA; *la somme des angles curvilignes* A, B, C, D, E, F, G *est égale à deux angles droits.*

En effet, chacun de ces angles A, B, C, D, E, F, G a son symétrique au point I. Or ces angles symétriques forment avec leurs opposés par le sommet, qui leur sont égaux chacun à chacun, la somme de tous les angles qui se trouvent autour du point I. Mais cette somme égale quatre angles droits. Donc la somme des angles A, B, C, D, E, F, G, qui en est la moitié, égale deux angles droits.

Cette proposition est encore vraie dans le cas où le point I, *fig.* 5, n'est pas compris entre les points A, B, C,.... Dans ce cas, les arcs AE, EB, BF, FC, CA, prolongés suffisamment. passant par le même point I.

on démontrerait absolument de la même manière que dans le cas précédent, que la somme des angles A, B, C, E, F égale deux droits.

13. Les angles A, B, C, E, F étant égaux à leurs opposés au sommet, on voit que, *dans tout polygone curviligne étoilé de dernière formation dont les côtés sont des circonférences de cercle, qui ont un point commun* I, *la somme des angles tels que* A, B, C, E, F *égale deux droits.*

Le point I pouvant être situé à l'infini, il devient évident que la proposition est encore vraie lorsque les côtés AE, EB, BF,... sont des lignes droites.

14. *Lorsqu'un polygone est inscrit à une courbe convexe quelconque, la somme de tous les angles, extérieurs au polygone, intérieurs à la courbe, formés à chaque sommet par la courbe et les côtés du polygone, est égale à quatre angles droits, quel que soit le nombre des côtés du polygone.*

En effet, la somme des trois angles, formés à chaque sommet du polygone par la courbe et les deux côtés du polygone qui aboutissent à ce sommet, est toujours égale à deux angles droits. Donc la somme des angles formés à chaque sommet par la courbe et les côtés du polygone, augmentée de tous les angles intérieurs du polygone, est égale à autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés. Or, si l'on joint par des droites chaque sommet à un même point pris dans l'intérieur du polygone, la somme des angles de tous les triangles ainsi formés sera aussi égale à autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés. Donc la somme des angles formés par la courbe et les côtés du polygone plus la somme des angles intérieurs du polygone, égale la somme des angles de tous les triangles formés autour du point intérieur; et, retranchant de part et d'autre la somme des angles intérieurs du polygone, on voit que la somme des angles formés par la courbe et les côtés du polygone égale la somme de tous les angles formés autour du point intérieur au polygone, c'est-à-dire quatre angles droits.

Du théorème **14** on déduit facilement le théorème suivant : *Lorsqu'une portion de polygone est inscrite à un arc de courbe convexe de manière à avoir ses deux extrémités communes avec cet arc de courbe, la somme de tous les angles extérieurs au polygone, intérieurs à la courbe, restera constante, quelques variations que subissent la position et le nombre des sommets de la portion de polygone inscrite.*

15. Les propositions **9**, **10**, **12**, **13** sont encore vraies sur la surface de la sphère.

En effet, elles se fondent sur ce que, 1° les angles curvilignes qui, tracés sur un même plan y ont un sommet commun, ont entre eux les mêmes relations que s'ils étaient rectilignes; 2° lorsque deux circonférences de cercle se coupent sur un même plan, les angles symétriques qu'elles forment sont égaux entre eux.

Or, en premier lieu, les angles curvilignes qui, tracés sur une surface de sphère y ont tous un point commun, conservent encore entre eux les mêmes relations qu'ils auraient, s'ils étaient tracés sur une surface plane.

En second lieu, il est évident que, lorsque deux circonférences de cercle se coupent, les angles symétriques qu'elles forment sont égaux deux à deux, lors même que les plans de ces circonférences sont différents, car il ne peut pas y avoir de raison pour que l'un soit plus grand que l'autre. Nous pouvons, en outre, démontrer l'égalité de deux de ces angles symétriques de la manière suivante: Imaginons dans l'espace deux cercles O et C qui se coupent aux deux points A et A'. Menons au cercle O par les points A et A' les tangentes AM, A'M qui se coupent nécessairement en un point M du plan de ce cercle; menons de même au cercle C les tangentes AN et A'N qui se coupent au point N. En joignant MN, on a deux triangles MAN, MA'N qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun; car MN est un côté commun à ces deux triangles, MA égale MA' comme tangente menée par un même point à un même cercle, NA égale de même NA'; donc les triangles sont égaux, et par conséquent, l'angle MAN égale l'angle MA'N; mais ces deux angles sont égaux chacun à chacun à un des deux angles symétriques formés par les circonférences de cercle O et C; par conséquent ces deux derniers angles sont égaux entre eux.

Donc les propositions **9**, **10**, **12**, **13** sont encore vraies sur la surface de la sphère.