JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P.-D. SAINT-GUILHEM

Mémoire sur la poussée que des terres nouvellement remuées exercent contre le parement d'un mur d'appui

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 1-19.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

MÉMOIRE
SUR LA POUSSÉE QUE DES TERRES NOUVELLEMENT REMUÉES
EXERCENT CONTRE LE PAREMENT D'UN MUR D'APPUI;

Par M. P.-D. SAINT-GUILHEM,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

§ Ier.

1. On suppose, dans le § 1er de ce Mémoire, que, sans négliger ni le frottement des terres ni leur adhérence lorsqu'elles glissent sur elles-mêmes ou sur le parement du mur d'appui, on attribue au remblai soutenu par le mur un profil polygonal quelconque.

M. Poncelet a publié il y a peu de temps, dans le n° 13 du *Mémorial de l'officier du Génie*, des recherches géométriques très-intéressantes sur ce sujet; mais il a négligé entièrement l'adhérence des terres entre elles et avec le parement du mur. La solution suivante, purement analytique, est très-simple et très-générale, comme on va le voir.

On supposera que le massif des terres et du mur est prismatique et qu'il a une longueur indéfinie; mais on ne considérera de ce massif qu'une longueur égale à l'unité.

Soient AB (*fig.* 1, *Pl. I*) le profil du parement intérieur du mur, B étant le point le plus bas; BC la ligne suivant laquelle la rupture des terres est censée avoir lieu; C le point où cette ligne rencontre le profil EF d'une des faces du remblai; D un point pris sur le prolongement de EF entre le mur et la ligne de rupture, de telle manière que le triangle BCD soit équivalent à la section du prisme qui s'éboule. Nommons d'ailleurs :

r la perpendiculaire abaissée du point B sur la ligne EF prolongée;

α l'angle que la droite BD, dirigée de B vers D, fait avec une horizontale menée par le point B du côté des terres (cet angle est le même que si le point C coïncidait avec le point E, par conséquent il est connu);

β, λ, ω les angles que les droites DC, BA, BC font avec la même horizontale;

γ la résistance par unité superficielle que deux portions du massif de terre éprouvent en glissant l'un sur l'autre par la seule adhérence des terres entre elles;

P la résultante des forces que font naître, d'une part, la réaction de la face AB contre le prisme de rupture, d'autre part, le frottement et l'adhérence que produirait le prisme de rupture en glissant le long de la face AB;

φ' l'angle aigu que la force P fait avec la normale au parement AB (cet angle est censé connu);

F la résultante de la réaction du plan BC contre le prisme de rupture et du frottement des terres contre ce plan;

φ l'angle aigu que le talus naturel des terres fait avec l'horizon ou l'angle que la force F fait avec la normale au plan BC;

S la force provenant de l'adhérence des terres entre elles sur toute l'étendue BC; cette force $=\frac{\gamma r}{\sin(\omega-\beta)}$;

Q le poids du prisme de rupture;

p sa densité.

Cela posé, il est facile de voir qu'au moment où le prisme de rupture est près de glisser sur le plan BC, il y a équilibre entre les forces Q, F, P et S. Donc si l'on projette ces forces sur une droite qui fasse avec l'horizontale menée du côté des terres un angle égal à $\omega-\varphi$, on aura, en observant que ces forces font respectivement avec l'horizontale désignée des angles égaux à 270 degrés, $\omega+90^\circ-\varphi$, $\lambda-90^\circ+\varphi'$

et ω; on aura, dis-je, la relation [*]

$$(1)\qquad Q\sin(\omega-\varphi) = P\sin(\lambda+\varphi'+\varphi-\omega) + \frac{\gamma r\cos\varphi}{\sin(\omega-6)}.$$

Observons maintenant que le poids Q du prisme de rupture est égal à sa densité multipliée par l'aire du triangle BDC, laquelle est numériquement égale à $\frac{r^2\sin(\alpha-\omega)}{2\sin(\alpha-6)\sin(\omega-6)}$; cette expression sera généralement positive : nous la supposerons telle.

Remplaçons, dans les formules qui précèdent, $\sin(\alpha-\omega)$, $\sin(\omega-6)$, $\sin(\lambda+\varphi'+\varphi-\omega)$ par les expressions respectivement équivalentes

$$\begin{gathered}\sin(\alpha-\varphi)\ \cos(\omega-\varphi)-\sin(\omega-\varphi)\ \cos(\alpha-\varphi),\\ \sin(\omega-\varphi)\ \cos(\varphi-6)+\cos(\omega-\varphi)\ \sin(\varphi-6),\\ \sin(\lambda+\varphi')\cos(\omega-\varphi)-\cos(\lambda+\varphi')\ \sin(\omega-\varphi);\end{gathered}$$

posons d'ailleurs, pour abréger,

$$\begin{gathered}\frac{pr^2\cos(\alpha-\varphi)}{2\sin(\alpha-6)\cos(\varphi-6)\cos(\lambda+\varphi')}=A,\quad \frac{\gamma r\cos\varphi}{\cos(\lambda+\varphi')\cos(\varphi-6)}=B,\\ \operatorname{tang}(\alpha-\varphi)=a,\quad \operatorname{tang}(\varphi-6)=b,\quad \operatorname{tang}(\lambda+\varphi')=c,\\ \operatorname{tang}(\omega-\varphi)=x,\end{gathered}$$

l'équation (1) se transformera aisément dans la suivante

$$(2)\qquad P = A\frac{(x-a)x}{(x+b)(x-c)} + B\frac{1+x^2}{(x+b)(x-c)};$$

ou bien, en décomposant les fractions composées en fractions simples, et faisant, pour abréger,

$$\begin{gathered}A(c-a)c + B(1+c^2) = N,\\ A(a+b)b + B(1+b^2) = D,\end{gathered}$$

on aura

$$(3)\qquad P = A + B + \frac{1}{b+c}\left(\frac{N}{x-c} - \frac{D}{x+b}\right).$$

[*] Pour avoir une quelconque de ces projections, il faudra évidemment multiplier la force correspondante par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec l'horizontale dirigée vers les terres, diminué de $\omega-\varphi$.

La ligne suivant laquelle nous avons supposé que les terres tendaient à se rompre est une ligne tout à fait arbitraire; pour avoir la ligne de rupture naturelle, il faut, conformément au principe de Coulomb, chercher la valeur de x qui rend P un maximum. Cette valeur satisfait à l'équation $\frac{dP}{dx} = 0$; or, cette condition donne immédiatement

$$\frac{x-c}{x+b} = \pm\sqrt{\frac{N}{D}} = R, \tag{4}$$

ou bien

$$x = \frac{c+bR}{1+R}. \tag{5}$$

La valeur de P correspondante à cette double valeur de x sera donnée, comme il est facile de s'en assurer [*], par la formule

$$P = A + B - \frac{D}{(x+b)^2}. \tag{6}$$

Parmi les deux valeurs de x que nous avons trouvées, il y en a nécessairement une qui correspond au maximum de la poussée : pour la distinguer de l'autre, il faut, d'après les principes du calcul différentiel, déterminer celle qui, substituée dans l'expression de $\frac{d^2P}{dx^2}$, donne un résultat négatif; or, en différentiant deux fois l'équation (3), on a

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{2D}{(x+b)^2(x+c)^2} \cdot \frac{x-c}{x+b}.$$

Nous avons trouvé précédemment que pour les valeurs de x dont il s'agit, le rapport $\frac{x-c}{x+b}$ a deux valeurs égales et de signes contraires : si l'on prend celle pour laquelle le rapport $\frac{x-c}{x+b}$ a un signe contraire à celui de D, la valeur de $\frac{d^2P}{dx^2}$ correspondante sera évidemment négative; P sera un maximum. Dans le cas contraire, $\frac{d^2P}{dx^2}$ sera positif, P sera un

[*] On y parviendra aisément en substituant pour $x - c$ et $x + b$ leurs valeurs dans l'équation (3).

minimum; en d'autres termes, suivant qu'on prendra D.R négatif ou positif, on aura pour P une valeur maximum ou minimum. La première de ces valeurs correspond à la poussée naturelle; la seconde est étrangère à la question [*]; mais si l'on y change φ en $-\varphi$, φ' en $-\varphi'$, elle représente une poussée particulière qui a une grande importance dans certaines applications : M. Poncelet l'a appelée, pour la distinguer de l'autre, la *butée* des terres; elle correspond évidemment au cas où le prisme de rupture, au lieu de descendre, tendrait à remonter le long du plan de rupture.

Toutefois, pour que ces valeurs de x soient admissibles, il faut qu'elles correspondent à des plans de rupture qui rencontrent, comme on l'a supposé, la face du remblai EF entre les points E et F. S'il n'en était pas ainsi, on devrait recommencer le calcul par rapport à une autre face.

2. Lorsqu'on néglige la force qui provient de la cohésion des terres entre elles, auquel cas $B = 0$, l'expression de la poussée peut se mettre sous une forme plus commode pour le calcul que l'expression (6). En effet, si l'on différentie directement l'expression (2), en regardant la quantité $\frac{x(x-a)}{(x+b)(x-c)}$ comme le produit de deux facteurs, dont l'un serait $\frac{x-a}{x+b}$, l'autre $\frac{x}{x-c}$, on trouve immédiatement

$$\frac{A(a+b)}{(x+b)^2}\cdot\frac{x}{(x-c)^2} - \frac{Ac}{x-c}\cdot\frac{x-a}{x-b} = 0,$$

d'où l'on déduit facilement

$$\frac{Ax(x-a)}{(x-c)(x+b)} = \frac{A(a+b)}{c}\cdot\left(\frac{x}{x+b}\right)^2 = P,$$

ou, en vertu de l'équation (4),

$$P = \frac{A(a+b)c}{(b+c)}\left(1+\frac{b}{c}R\right)^2.$$

---

[*] Observons cependant que si ω était négatif, ce qui peut avoir lieu dans certains cas, la valeur de P dont il s'agit donnerait, en y supposant $\varphi' = 0$, la plus petite poussée qui, appliquée extérieurement au parement du mur, suffirait pour rompre le massif des terres.

Pour distinguer la valeur maximum de la valeur minimum, on remarquera que l'on a $DR = A(a+b)c.\frac{b}{c}R$; que $A(a+b)c$ est essentiellement positif, sans quoi la poussée serait négative, ce qui est inadmissible : de là il résulte que P sera un maximum si l'on prend pour R la valeur qui rend $\frac{b}{c}.R$ une quantité négative ; que P sera un minimum dans le cas contraire : en d'autres termes, si l'on appelle K la valeur numérique de $\frac{b}{c}R$, on aura

$$P = \frac{A(a+b)c}{(b+c)^2}(1 \pm K)^2,$$

le signe inférieur de K étant relatif au maximum, le signe supérieur au minimum.

Si l'on remplace A, R, a, b, c par leurs valeurs exprimées au moyen de λ, φ, φ', α, β, p, r, on aura

$$K = \sqrt{\frac{\sin(\lambda+\varphi+\varphi'-\alpha)\sin(\varphi-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\lambda+\varphi')}}. \tag{7}$$

$$P = \frac{1}{2}pr^2\frac{\sin(\lambda+\varphi')}{\sin^2(\lambda+\varphi+\varphi'-\beta)}(1 \pm K)^2, \tag{8}$$

la valeur de x, correspondante à cette valeur de P, étant donnée par la formule

$$x = \frac{(1 \pm K)\tan(\lambda+\varphi')}{1 \pm \frac{\tan(\lambda+\varphi')}{\tan(\varphi+\beta)}K} \tag{9}$$ [*].

Il ne faudra pas oublier que dans ces formules les signes supérieurs et inférieurs des termes affectés de double signe se correspondent, et que pour avoir la butée, on doit, dans l'expression du minimum de P, changer φ en $-\varphi$, et φ' en $-\varphi'$.

---

[*] Si $\lambda + \varphi' = 90°$, on aura simplement

$$K = \sqrt{\frac{\cos(\varphi-\alpha)\sin(\varphi-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}}, \qquad x = \pm\frac{(1 \pm K)\tan(\varphi-\beta)}{K}.$$

3. La formule (8) donne lieu à une construction graphique très-remarquable et très-simple : menons par le point B une droite BO qui fasse avec l'horizontale menée du côté des terres un angle égal à $\lambda + \varphi + \varphi'$ et qui rencontre EF prolongé en O; menons par le point D une droite DG qui fasse avec la même horizontale un angle égal à φ et qui rencontre BO en G, on trouvera aisément, à l'aide des principes de la trigonométrie,

$$\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OD}} = \frac{\sin(\alpha - 6)}{\sin(\lambda + \varphi' - \alpha)}, \quad \frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OD}} = \frac{\sin(\varphi - 6)}{\sin(\lambda + \varphi')};$$

par conséquent

$$\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OB}} = \mathrm{K}^2.$$

Si l'on prend d'ailleurs sur la ligne OB un point X, tel que $\overline{\mathrm{OX}}^2 = \mathrm{OG}.\mathrm{OB}$, et si l'on fait attention que $\mathrm{OB} = \frac{r}{\sin(\lambda + \varphi + \varphi' - 6)}$, on verra que l'on a simplement

$$\mathrm{P} = \tfrac{1}{2} p \sin(\lambda + \varphi')\overline{\mathrm{BX}}^2,$$

en ne prenant que la valeur de P qui correspond au maximum de la poussée.

Il est très-facile d'obtenir, par une construction analogue, ce que devient la valeur minimum de P lorsqu'on y change φ en $-\varphi$ et φ' en $-\varphi'$: nous ne nous y arrêterons pas. Ces constructions sont précisément celles auxquelles M. Poncelet est parvenu directement (pour le cas particulier dont il s'agit) par des considérations purement géométriques, dans son beau Mémoire sur la stabilité des revêtements.

4. La détermination du point d'application de la poussée sur le parement AB du mur ne présente pas de difficulté. Désignons par N la réaction du parement AB contre le prisme de rupture (ou la force P estimée suivant la normale à AB); par N_z [*] la valeur de N correspondante à une longueur z du parement, comptée à partir du point le plus élevé A; par l la longueur totale AB du parement; par L le moment

[*] Si l'on désigne par γ' la résistance, par unité superficielle, que les terres éprouvent en glissant sur le parement AB en vertu seulement de leur adhérence au parement,

de la poussée exercée sur le parement AB par rapport au point A, on aura la formule

$$(10)\qquad L = \int z\,dN_z,$$

l'intégrale étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = l$.

Si cette intégrale ne peut être obtenue exactement par des calculs simples, on se bornera à calculer approximativement la somme des éléments $z\,dN_z$, en faisant varier z par degrés insensibles. Connaissant L, en le divisant par la valeur de N correspondante à la longueur totale AB du parement, on aura la distance du point A au point d'application de la poussée sur le parement.

La formule (10) s'applique à toutes les hypothèses; mais si l'on suppose $B = 0$, comme dans les formules (7), (8) et (9), on simplifiera généralement la formule (10), en observant qu'une première intégration par parties donne $L = Pl - \int_0^l N_z\,dz$.

Si l'on pose maintenant $N_z = z^2 T$, et qu'on intègre de nouveau par parties, en considérant z^2dz comme la différentielle d'une partie, on aura

$$(11)\qquad L = \tfrac{2}{3}Pl + \tfrac{1}{3}\int z^3 dT.$$

Il ne restera plus qu'à trouver l'intégrale de z^3dT depuis $z = 0$ jusqu'à $z = l$: on l'obtiendra facilement par approximation, si l'on ne peut pas l'avoir exactement.

---

et par f' le coefficient du frottement dans ce glissement, on aura généralement

$$N_z = P\cos\varphi',$$

φ' étant donné par la formule

$$f'P\cos\varphi' + \gamma'z = P\sin\varphi',$$

ou par la suivante

$$P^2(1+f'^2)\cos^2\varphi' + 2Pf'\gamma'z\cos\varphi' = P^2 - \gamma'^2z^2;$$

si γ' est sensiblement nul, on aura simplement

$$\operatorname{tang}\varphi' = f',$$

ce qui devait être.

§ II.

APPLICATIONS A DES CAS PARTICULIERS.

Cas d'une terrasse dont le plan supérieur monte à partir de l'arête du couronnement du mur, en faisant avec l'horizon un angle moindre que celui du talus naturel des terres.

5. On supposera, pour plus de simplicité, dans les diverses applications qui vont suivre, qu'on néglige l'adhérence des terres entre elles, leur adhérence au parement du mur et leur frottement sur ce parement. Alors, pour trouver la poussée, on n'a qu'à faire, dans les formules (7), (8) et (11), savoir :

$$\varphi' = 0, \quad \alpha = \lambda;$$

ce qui donne

$$(12) \qquad K = \sqrt{\frac{\sin\varphi \sin(\varphi - 6)}{\sin(\lambda - 6)\sin\lambda}},$$

$$(13) \qquad P = \tfrac{1}{2} pr^2 \frac{\sin\lambda}{\sin^2(\lambda - 6 + \varphi)}(1 - K)^2,$$

$$(14) \qquad L = \tfrac{2}{3} Pl.$$

6. Si l'on suppose que l'on ait $6 = 0$, c'est-à-dire que la terrasse soit horizontale, on aura

$$K = \frac{\sin\varphi}{\sin\lambda},$$

et, par suite, si l'on observe que

$$r = l\sin\lambda,$$

que

$$\sin\lambda - \sin\varphi = 2\sin\frac{\lambda-\varphi}{2}\cos\frac{\lambda+\varphi}{2},$$

que

$$\sin(\lambda+\varphi) = 2\sin\frac{\lambda+\varphi}{2}\cos\frac{\lambda+\varphi}{2},$$

et si l'on pose d'ailleurs

$$\frac{\lambda-\varphi}{2} = \varphi_1,$$

on aura simplement

$$(15)\qquad P = \tfrac{1}{2} p l^2 \sin\lambda \left[\frac{\sin\varphi_1}{\sin(\lambda-\varphi_1)}\right]^2,$$

$$(16)\qquad L = \tfrac{2}{3} P l.$$

La ligne de rupture a, dans le cas particulier dont il s'agit, une direction remarquable : on déduit en effet de l'équation (9),

$$(17)\qquad x = \frac{(1-K)\tang\lambda}{1 + \dfrac{\tang\lambda}{\tang\varphi} K};$$

et, en observant que

$$\sin\lambda - \sin\varphi = 2\sin\frac{\lambda-\varphi}{2}\cos\frac{\lambda+\varphi}{2},$$

et que

$$\cos\lambda + \cos\varphi = 2\cos\frac{\lambda+\varphi}{2}\cos\frac{\lambda-\varphi}{2},$$

on aura simplement

$$(18)\qquad x = \tang\frac{\lambda-\varphi}{2} = \tang\varphi_1.$$

Si l'on désigne par P′ et x' ce que deviennent P et x dans l'hypothèse de la butée des terres [on obtiendra ces quantités en changeant K en $-$K et φ en $-\varphi$ dans les formules (13) et (17)], on aura

$$(19)\qquad P' = \tfrac{1}{2} p l^2 \sin\lambda \left[\frac{\sin(\lambda-\varphi_1)}{\sin\varphi_1}\right]^2,$$

$$(20)\qquad x' = \tang\frac{\lambda+\varphi}{2} = \tang(\lambda-\varphi_1).$$

Si l'on fait attention que $x' = \tang(\omega+\varphi)$, on déduira de là

$$\omega = \frac{\lambda-\varphi}{2} = \varphi_1.$$

Il résulte des formules (18) et (20), 1° que, dans le cas de la poussée, la ligne de rupture divise en deux parties égales, comme on le sait depuis longtemps, l'angle que le parement du mur fait avec le talus que prendraient naturellement les terres si l'on reculait le mur; 2° que, dans le cas de la butée, la ligne de rupture fait, avec l'horizontale dirigée vers les terres, un angle égal à la moitié de celui dont il vient d'être question; en sorte que, si le parement était poussé d'un côté et buté de l'autre par des terres de même nature, les deux lignes de rupture seraient à angle droit l'une sur l'autre.

Cas d'une terrasse en parapet dont le plan supérieur forme avec l'horizon un talus plus doux que le talus naturel des terres.

7. On suppose que le pied du talus du parapet ACD coïncide avec l'arête intérieure A (*fig.* 2) du couronnement du mur; que le talus AC forme, avec l'horizontale dirigée vers les terres, un angle 6_0; que le plan supérieur CD de la terrasse fait avec la même horizontale un angle 6_1; enfin, que la partie Aa du parement prolongé comprise entre le point A et le plan CD prolongé, est égale à h. On conserve d'ailleurs pour λ, φ et α les conventions faites précédemment. Cela posé, distinguons deux cas : 6_0 est $>$ ou $< \varphi$.

Soit $6_0 > \varphi$, z étant une portion quelconque Ab du parement, et α_z la valeur de α correspondante. Il est visible que pour avoir α_z il faudra mener Ak parallèle à bC et joindre bk. L'angle que bk fera avec l'horizontale dirigée vers les terres sera la valeur de α_z. D'après cela, on trouvera facilement [*], au moyen des principes de la trigonométrie,

[*] Le triangle AaC donne

$$aC = \frac{h \sin(\lambda - 6_0)}{\sin(6_0 - 6_1)};$$

les deux triangles aAk, abC, comparés entre eux, donnent

$$ak = \frac{h}{z + h} \cdot aC;$$

le triangle bak donne

$$\operatorname{tang}(b + \tfrac{1}{2} a) = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a \cdot \frac{ab + ak}{ab - ak}.$$

Si l'on observe d'ailleurs que $a = 180^\circ - \lambda + 6_1$, et que $b = \lambda - \alpha_z$, on aura immédiatement la formule du texte.

que α_z est donné par la formule

$$\cot\left(\alpha_z - \frac{\lambda + \beta_1}{2}\right) = \frac{(z+h)^2 \sin(\beta_0 - \beta_1) + h^2 \sin(\lambda - \beta_0)}{(z+h)^2 \sin(\beta_0 - \beta_1) - h^2 \sin(\lambda - \beta_0)} \cot\left(\frac{\lambda - \beta_1}{2}\right),$$

ou, en posant pour abréger

$$(21) \qquad \left(\frac{h}{z+h}\right)^2 \frac{\sin(\lambda - \beta_0)}{\sin(\beta_0 - \beta_1)} = \operatorname{tang} k_z,$$

par la formule suivante,

$$(22) \qquad \cot\left(\alpha_z - \frac{\lambda + \beta_1}{2}\right) = \operatorname{tang}(45^\circ + k_z) \cot\left(\frac{\lambda - \beta_1}{2}\right).$$

Connaissant α_z, on aura la valeur de P correspondante à une valeur quelconque de z, au moyen des formules suivantes, déduites des formules (7) et (8) :

$$(23) \qquad K = \sqrt{\frac{\sin(\lambda + \varphi - \alpha_z)\sin(\varphi - \beta_1)}{\sin(\alpha_z - \beta_1)\sin\lambda}},$$

$$(24) \qquad P = \tfrac{1}{2} p z^2 \sin\lambda \left[\frac{(1 - K)\sin(\lambda - \beta_1)}{\sin(\lambda + \varphi - \beta_1)}\right]^2.$$

Si l'on combine la formule (11), dans laquelle

$$T = \tfrac{1}{2} p \sin\lambda \left[\frac{(1 - K)\sin(\lambda - \beta_1)}{\sin(\lambda + \varphi - \beta_1)}\right],$$

avec les formules (21), (22), (23) et (24), on aura la valeur de L.

8. Soit $\beta_0 < \varphi$; il pourra arriver que la ligne de rupture correspondante à l'extrémité inférieure du parement ne rencontre pas le plan supérieur ou bien le rencontre quelque part. Dans le premier cas, on tombe dans la première application que nous avons faite (5); dans le deuxième cas, on cherchera la ligne de rupture qui aboutit à l'arête C, *fig.* 3, du plan supérieur. On la trouvera en observant qu'en vertu des formules (7) et (9) on a

$$(25) \qquad K = \sqrt{\frac{\sin\varphi \sin(\varphi - \beta_0)}{\sin(\lambda - \beta)\sin\lambda}},$$

$$(26) \qquad \operatorname{tang}(\omega - \varphi) = \frac{(1 - K)\operatorname{tang}\lambda}{1 + K\dfrac{\operatorname{tang}\lambda}{\operatorname{tang}(\varphi - \beta_0)}}.$$

Connaissant $\omega - \varphi$, et par conséquent $\lambda - \omega$, on connaîtra, dans le triangle AbC, le côté AC et les angles A et b; par conséquent Ab sera donné par les formules

$$Ab = \frac{\sin(\omega - 6_0)}{\sin(\lambda - \omega)} AC, \quad AC = \frac{h \sin(\lambda - 6_1)}{\sin(6_0 - 6_1)}.$$

Cela fait, on calculera la poussée sur Ab et son moment au moyen des formules du n° 5. La poussée sur Bb et son moment s'obtiendront au moyen des formules du numéro précédent. Seulement on fera attention que dans la formule (11) l'intégrale doit être prise à partir de $z = Ab$ et non à partir de $z = 0$.

PROBLÈME.

9. « Une caisse dont le profil est un rectangle à base horizontale » et dont la longueur est indéfinie, est remplie de terre jusqu'au ni- » veau des bords; on demande la pression sur les côtés et sur le fond » de la caisse. »

Soit ABCD, *fig.* 4, la section transversale de la caisse dont il s'agit. Occupons-nous d'abord de la pression sur les faces AB et DC: il est évident que si, à côté de la caisse ABCD, on place sur le plan horizontal, et touchant l'autre, une nouvelle caisse DCEF parfaitement égale à la première et remplie d'une terre semblable, la cloison commune DC éprouvera des deux côtés la même pression, ou, ce qui revient au même, l'action des terres de la caisse DCEF sur les terres de l'autre caisse remplacera identiquement l'action de la cloison sur celles-ci. De même, on pourra remplacer l'action de la cloison FE sur les terres de la seconde caisse par l'action des terres d'une troisième caisse semblable aux deux premières, et ainsi de suite. Donc l'action des terres de la caisse ABCD sur la face AB sera la même que si la largeur de la caisse était indéfinie dans le sens AD. La pression sur DC s'obtiendra de la même manière.

Passons maintenant à la pression exercée sur le fond de la caisse. Appelons h la hauteur de la caisse; e sa largeur; φ_1 l'angle que la ligne de rupture correspondante au point B fait avec AB; p la densité des terres; γ' le coefficient de frottement des terres sur les faces de la caisse; γ'' le coefficient de l'adhérence des terres sur les mêmes faces. Il est évident que si l'on suppose γ' et γ'' nuls, la pression P_1 sur le fond sera égale à phe; mais le frottement sur AB ou DC étant égal à $\frac{1}{2}ph^2 \operatorname{tang} \varphi_1 . \gamma'$, et l'adhérence sur l'une ou l'autre de ces faces étant égale à $h\gamma''$, on aura réellement

$$P_1 = h\,(pe - 2\gamma'' - ph \operatorname{tang} \varphi_1 \gamma').$$

Si le massif des terres, au lieu d'être contenu entre deux cloisons, était indéfini dans le sens de la largeur, il faudrait remplacer γ' par le coefficient γ du frottement des terres sur elles-mêmes. On aura ainsi la formule qui servirait à évaluer la pression que supporte, par exemple, un pont chargé d'une hauteur h de terre; dans ce cas, d'après M. Navier, γ varie, suivant la nature des terres, depuis 0,6 jusqu'à 1,40; γ'' varie depuis 136 kilogrammes jusqu'à 568 kilogrammes.

§ III.

Méthode à l'aide de laquelle on peut déterminer la poussée contre un mur dont le parement a un profil polygonal quelconque.

10. Nous admettrons ici que les terres n'ont aucune tendance à glisser sur les faces du parement, ou, ce qui revient au même, que tout mouvement des terres est empêché par des forces perpendiculaires aux faces du parement appliquées en certains points de ces faces. Dans cette hypothèse, considérant d'abord un parement à deux faces ABB_1, *fig.* 5, soutenant un remblai de terre B_1BAEF, la face AB donnera lieu à une réaction dont on déterminera facilement la grandeur et le point d'application sur AB au moyen des formules des n^os **1** et **4**, en faisant dans celles-ci $\varphi' = 0$. On trouvera aussi, au moyen des mêmes formules, la ligne de rupture correspondante au point B. Soit P_0 la réaction de AB, b son point d'application sur la même face, BD la ligne de rupture, Q_0 le poids du prisme ABDE dirigé suivant la verticale qui passe par le centre de gravité de ce prisme. Il est visible que l'action du prisme BAED sur le plan BD est la résultante des forces P_0 et Q_0, et qu'on pourra remplacer l'action du prisme BAED par la résultante dont il s'agit appliquée au point où elle rencontre le plan solide BD, ou, ce qui revient au même, par les composantes appliquées aux points où elles rencontrent le même plan. Alors, pour trouver l'action des terres, relativement à une ligne de rupture B_1D_1, sur la face BB_1 il suffira évidemment de chercher la résultante de la force P_0 et du poids Q_1 du prisme B_1BAEF ; de décomposer ensuite cette résultante en trois, l'une perpendiculaire à BB_1, l'autre perpendiculaire à B_1D_1, la troisième parallèle à B_1D_1 (dirigée de B_1 vers D_1) et égale à la résistance que fait naître le massif en glissant le long de D_1B_1 ; il est clair alors que la composante perpendiculaire à BB_1 sera égale et contraire à la réaction de BB_1 contre le massif, d'où l'on voit que si la ligne de rupture B_1D_1 était connue, la réaction de BB_1 serait également connue ; or, cette ligne B_1D_1 se détermine sans difficulté à l'aide des principes dont on a fait usage dans le n° **1**.

Si le parement avait trois faces, il est facile de voir que les mêmes considérations conduiraient à la détermination de la réaction de la troisième ; il est facile de voir encore qu'en continuant les mêmes considérations, on déterminerait la réaction d'une face quelconque d'un parement qui aurait autant de faces qu'on voudrait.

Supposons que l'on désigne par $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ les angles que les première, deuxième, troisième, ..., $(m+1)^{ième}$ faces font avec une horizontale menée du côté des terres ; par $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_m$ les réactions de ces mêmes faces contre le massif des terres ; conservons aux lettres $\alpha, 6, \omega, \varphi, \gamma, r$ et Q les mêmes significations qu'au n° **1**. En raisonnant comme on a fait à ce numéro, on trouvera, au lieu de l'équation (1), la suivante,

$$Q\sin(\omega-\varphi) = P_m \sin(\lambda_m+\varphi-\omega) + \sum P_n \sin(\lambda_n+\varphi-\omega) + \frac{\gamma . \cos\varphi}{\sin(\omega-6)},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de n depuis $n=0$ jusqu'à $n=m-1$.

Si l'on pose, pour abréger,

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{pr^2\cos(\alpha-\varphi)}{2\sin(\alpha-6)\cos(\varphi-6)\cos\lambda_m} = A, \quad \dfrac{\gamma r\cos\varphi}{\cos(\varphi-6)\cos\lambda_m} = B, \\ \sum P_n \dfrac{\cos\lambda_n}{\cos\lambda_m}(\operatorname{tang}\lambda_n - \operatorname{tang}\lambda_m) = C, \quad \operatorname{tang}(\alpha-\varphi) = a, \\ \operatorname{tang}(\varphi-6) = b, \quad \operatorname{tang}\lambda_n = c_n, \quad \operatorname{tang}(\omega-\varphi) = x; \end{array}\right.$$

l'équation précédente se transformera aisément en celle qui suit :

$$P_m = A\frac{(x-a)x}{(x+b)(x-c_m)} + B\frac{1+x^2}{(x+b)(x-c_m)} + \frac{C}{x-c_m} - \sum P_n \frac{\cos\lambda_n}{\cos\lambda_m},$$

qui, en décomposant les fractions composées en fractions simples, et en posant, pour abréger,

$$(28)\qquad \begin{cases} A(c_m - a)c_m + B(1 + c_m^2) + C(b + c_m) = N, \\ A(a + b)b + B(1 + c_m^2) = D, \end{cases}$$

devient elle-même

$$P_m = A + B - \sum P_n \frac{\cos\lambda_n}{\cos\lambda_m} + \frac{1}{b + c_m}\left(\frac{N}{x - c_m} - \frac{D}{x + b}\right).$$

Traitant cette équation comme l'équation (3) du n° **1**, et posant, pour abréger, $\sqrt{\frac{N}{D}} = R$, on aura, pour résoudre la question dont il s'agit, les deux formules suivantes :

$$(29)\qquad \begin{cases} P_m = A + B - \sum P_n \frac{\cos\lambda_n}{\cos\lambda_m} - \frac{D}{(x + b)^2}, \\ x = \frac{c_m \pm bR}{1 \pm R}; \end{cases}$$

en ayant soin de prendre dans la dernière, au lieu du double signe, le signe inférieur ou le signe supérieur, suivant que D est positif ou négatif. On aurait la butée des terres en prenant le signe contraire et en changeant φ en $-\varphi$.

La détermination du moment de la poussée sur une face, par rapport à l'extrémité supérieure de cette face, ne saurait présenter aucune difficulté. En effet, si l'on désigne par l_0, l_1, l_2,... les longueurs des première, deuxième, troisième faces, par $P_{(m,z)}$ la réaction de la $(m+1)^{ième}$ face sur une longueur z, par L_m le moment de la poussée P_m, par rapport à l'extrémité supérieure de la face l_m, on aura

$$(30)\qquad L_m = P_m l_m - \int_0^{l_m} P_{(m,z)}\, dz,$$

$P_{(m,z)}$ étant donné par les formules (27), (28) et (29), dans lesquelles on prendra pour r les valeurs correspondantes aux valeurs successives de z. Il est bien entendu que cette solution n'est exacte qu'en ayant égard aux restrictions que nous avons faites à la fin du n° **1**.

Modification qu'il paraîtrait convenable d'apporter au principe de Coulomb.

11. Tous les auteurs qui ont écrit sur la poussée des terres après Coulomb admettent que le plan de rupture est déterminé, quelle que soit l'inclinaison du parement du mur sur l'horizon, par la condition que si l'on décompose le poids du prisme détaché en trois forces, l'une normale au parement du mur, l'autre normale au plan de rupture, la troisième parallèle au plan de rupture et égale à la résistance que ce plan oppose au glissement du prisme détaché, la première soit un maximum par rapport à la direction du plan de rupture. Ce principe manque, à notre avis, d'exactitude, ou du moins n'a pas la généralité qu'on lui suppose; nous allons essayer de le prouver par un exemple frappant :

Supposons qu'un parement en maçonnerie AB, *fig.* 6, à peu près horizontal, comme serait le couronnement d'un mur AB A'B', soit surmonté d'un parapet en terre BAEF; si l'on veut savoir la pression qu'éprouve le parement AB, il est naturel d'appliquer à cette question le principe de Coulomb, comme nous l'avons fait précédemment. Or, en négligeant la cohésion des terres, on trouve que le plan de rupture BD est à peu près parallèle au talus naturel des terres; que la poussée sur AB est à peu près égale au poids du prisme détaché, et que l'action de ce dernier prisme sur BD est à peu près nulle. Ces résultats sont inadmissibles, car si l'action du prisme détaché sur BD était sensiblement nulle, il s'ensuivrait que ce prisme pourrait à très-peu près se soutenir tout seul, ce qui est absurde. Si cette action n'est pas nulle, la réaction de AB n'est pas non plus égale au poids du prisme détaché [*]; donc le principe de Coulomb est inexact dans ce cas.

Nos réflexions nous ont amené à modifier le principe dont il s'agit de la manière suivante : Admettons que sans changer de forme ni de densité, le prisme détaché se solidifie et tende à glisser le long du plan de

[*] Ceci explique pourquoi les géomètres qui se sont occupés de l'action des terres sur les demi-revêtements ont toujours supposé que le massif des terres se divisait suivant le prolongement du parement intérieur du mur, ce qui est peu rationnel.

rupture; il pourra toujours être tenu en équilibre par une force parallèle à ce plan : or, nous supposerons que le parement du mur qui soutient les terres produit exactement le même effet que la force dont nous venons de parler. Il est bien vrai que le parement de mur fera naître une réaction perpendiculaire à ce mur; mais nous admettrons que lorsque la force qui est égale et opposée à celle qui maintient le prisme solidifié en équilibre n'est pas perpendiculaire au parement du mur, elle se décompose en deux autres, l'une perpendiculaire au parement du mur et détruite par la résistance normale de ce parement, l'autre parallèle au parement et détruite par la résistance qu'il oppose au glissement.

Cela posé, on doit regarder comme évident, conformément au principe de Coulomb, que le prisme qui tendra à se détacher sera celui pour lequel la force qui le maintient en équilibre sur le plan de rupture sera un maximum.

Appliquons ce principe à la détermination du plan de rupture et de la poussée supposée parallèle au plan de rupture.

Conservons les notations du n° 1, en appelant toutefois G la nouvelle poussée, nous aurons, au lieu de l'équation (1), la suivante

$$Q \sin(\omega - \varphi) = G \cos\varphi + \frac{\gamma r \cos\varphi}{\sin(\omega - 6)},$$

ou en mettant pour Q sa valeur et transposant,

$$G = \frac{1}{2} p \frac{r^2}{\cos\varphi \sin(\alpha - 6)} \cdot \frac{\sin(\alpha - \omega)\sin(\omega - \varphi)}{\sin(\omega - 6)} - \frac{\gamma r}{\sin(\omega - 6)};$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\frac{1}{2} p r^2 \cos(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi \sin(\alpha - 6)\cos(\varphi - 6)} = A', \qquad \frac{\gamma r}{\cos(\varphi - 6)} = B',$$

cette équation deviendra

$$G = A' \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{a - x}{x + b} - B' \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x + b},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dG}{dx} = - \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ x^3[A'(a + b) + B'b] + x^2(A' - B') + bx(2A' + B') - A'ab - B' \right\};$$

par conséquent on aura la direction du plan de rupture en posant

$$x^3[A'(a + b) + B'b] + x^2(A' - B') + bx(2A + B') - A'ab - B' = 0,$$

et en cherchant la valeur de x qui satisfait à cette équation, et qui est comprise entre $x = 0$ et $x = \mathrm{tang}(\lambda - \varphi)$, puisque ω est nécessairement $> \varphi$ et $< \lambda$ [*].

Cette solution approcherait plus, à notre avis, de la vérité, du moins dans certains cas, que celle de Coulomb.

Mais si l'on fait attention que le principe de Coulomb fournit dans tous les cas une solution facile; qu'elle donne pour l'action normale du prisme sur le parement du mur une valeur plus grande que l'autre; que la recherche de cette action a pour but ordinairement de déterminer l'épaisseur à donner au mur destiné à la vaincre; qu'il ne peut en résulter pour ce mur qu'une épaisseur exagérée, ce qui n'a pas d'inconvénient pratique, nous conclurons de ces observations, quelle que soit l'opinion qu'on ait de la solution précédente, qu'il convient, dans les cas ordinaires, de conserver la solution donnée au n° **1**. On pourra avoir recours à la nouvelle solution lorsque l'on considérera des parements qui seraient horizontaux, ou auraient une très-petite inclinaison sur l'horizon.

---

[*] Si l'on suppose, par exemple, que l'on ait

$$\gamma = 0, \quad \varphi = 45^\circ, \quad \lambda = \alpha = 90^\circ, \quad 6 = 0,$$

on aura l'équation

$$2x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0,$$

laquelle est satisfaite à très-peu près par $x = 0,38$, comprise entre $x = 0$ et $x = 1$; elle signifie que le plan de rupture fait avec le parement du mur un angle de $24^\circ\, 12'$; par le principe de Coulomb on aurait trouvé $22^\circ\, 30'$: la différence eût été assez petite; mais l'action perpendiculaire au parement eût été dans un cas (φ_1 étant l'angle que le plan de rupture fait avec le parement)

$$\frac{\frac{1}{2} pr^2 \,\mathrm{tang}\, \varphi_1 \cos(\varphi + \varphi_1) \sin \varphi_1}{\cos \varphi} = \tfrac{1}{2} pr^2 . 0,0925;$$

tandis que dans l'autre cas elle eût été

$$\tfrac{1}{2} pr^2 \,\mathrm{tang}^2 \varphi_1 = \tfrac{1}{2} pr^2 . 0,1716.$$

Le point d'application sur le parement eût été d'ailleurs le même.