JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. LOBATTO

Note sur une propriété relative aux racines d'une classe particulière d'équations du troisième degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 177-190.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__177_0>

NOTE

Sur une propriété relative aux racines d'une classe particulière d'équations du troisième degré,

Par R. LOBATTO,

Professeur de Mathématiques à l'Académie royale de Delft.

---

1. M. le professeur Young, dans son Traité intitulé *The Analysis and solution of cubic and biquadratic equations,* publié à Londres en 1842, a fait connaître les formules suivantes pour obtenir les valeurs numériques de deux racines quelconques x_1, x_2 de l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

la troisième x étant connue:

$$x_1 = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{-p^3 - 6\frac{3}{4}q^2}}{3q + 2px}, \quad x_2 = -\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{-p^3 - 6\frac{3}{4}q^2}}{3q + 2px}.$$

Ces deux formules, qui n'en forment qu'une seule en donnant le double signe au radical, peuvent être démontrées ainsi qu'il suit.

2. On a, d'après la formule de Cardan, en posant

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}, \\ z &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}, \end{aligned}\right.$$

pour la valeur d'une des racines,

$$x = y + z.$$

Les deux autres seront comprises dans l'expression

$$(2) \qquad -\frac{1}{2}\left[x \pm (y - z)\sqrt{-3}\right].$$

Il s'agit maintenant d'obtenir la valeur de la différence $y - z$ en fonction de x et des coefficients p, q. Pour cela, les formules (1) donnent les relations

$$y^3 - z^3 = 2\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}, \quad y^3 + z^3 = -q, \quad yz = -\frac{p}{3}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{y^3 - z^3}{y - z} = \frac{y^3 + z^3}{y + z} + 2yz,$$

d'où l'on déduira, après les substitutions nécessaires,

$$\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}{y - z} = -\frac{q}{x} - \frac{2p}{3};$$

partant,

$$y - z = -\frac{3x\sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{3q + 2px},$$

ce qui change la formule (2), toutes réductions faites, en celle-ci :

$$(3) \qquad -\frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{-p^3 - 6\frac{3}{4}q^2}}{3q + 2px},$$

expression très-propre au calcul des deux autres racines, chaque fois que la quantité sous le radical représente un carré parfait, ce qui aura nécessairement lieu lorsque les trois racines seront des nombres commensurables. Il peut arriver cependant que cette quantité soit un nombre carré, sans qu'aucune des trois racines ait une valeur commensurable.

3. Dans le cas où $\sqrt{-p^3 - 6\frac{3}{4}q^2}$ est un nombre irrationnel, il sera préférable de calculer les deux racines inconnues à l'aide de la formule

$$(4) \qquad -\frac{x}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3q}{x} - p},$$

ou de celle-ci

$$-\frac{x}{2} \pm \sqrt{3\left(\frac{x}{2}\right)^2 - p},$$

à laquelle on parvient facilement de la manière suivante.

On a, en vertu des propriétés des trois racines,

$$x_1 + x_2 = -x, \quad x_1 x_2 = -\frac{q}{x},$$

donc

$$x_1 - x_2 = \pm\sqrt{x^2 + \frac{4q}{x}} = \pm\sqrt{\frac{x^3+4q}{x}} = \pm\sqrt{\frac{3q}{x} - p} = \pm 2\sqrt{-\frac{3x^2}{4} - p},$$

$$x_1 = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3q}{x} - p}, \quad x_2 = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3q}{x} - p},$$

$$= -\frac{x}{2} + \sqrt{-\frac{3x^2}{4} - p}, \quad = -\frac{x}{2} - \sqrt{-\frac{3x^2}{4} - p}.$$

En appliquant la formule (3) à l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

qui donne

$$p = -7, \quad q = 7, \quad \sqrt{-p^3 - 6\tfrac{3}{4}q^2} = \sqrt{343 - 330,75} = 3,5,$$

on trouvera, pour les valeurs des deux racines x_1, x_2,

$$-\frac{x}{2} \pm \frac{3,5x}{21 - 14x} = -\frac{x}{2} \pm \frac{x}{6-4x}.$$

4. Il paraît, d'après l'auteur que nous avons cité ci-dessus, qu'un de ses compatriotes, M. Lockhart, possède une autre formule pour exprimer ces racines sous forme rationnelle, lorsque la quantité $-p^3 - 6\frac{3}{4}q^2$ est un nombre carré. En effet, ce dernier géomètre doit avoir publié en 1837, dans un ouvrage sur la résolution des équations numériques, que deux racines quelconques de l'équation

$$x^3 - 19x - 30 = 0,$$

qui remplit la condition énoncée, et qui a pour racines 5, -3, -2, peuvent s'exprimer par deux fractions rationnelles dont l'une est

$$(5) \qquad -\left(\frac{163x + 361}{57x + 107}\right),$$

où l'on peut prendre pour x une des trois racines à volonté, de manière que cette seule fraction renferme à la fois les deux racines inconnues.

Cette expression assez remarquable diffère de celle donnée par M. Young, puisqu'en appliquant sa formule (3) à l'équation proposée, on trouve la formule

$$-\tfrac{1}{2}x \pm \frac{14x}{45+19x},$$

qui ne lui semble pas réductible à la précédente.

N'ayant pas connaissance du travail de M. Lockhart sur cette matière, j'ai tâché d'obtenir la formule générale d'où l'équation (5) a été déduite, et qui doit avoir la forme

$$\frac{Ax+B}{A'x+B'},$$

A, B, A', B' étant des nombres entiers. J'y suis parvenu de la manière que je vais actuellement exposer.

5. Comme la réalité des trois racines exige que le coefficient p soit un nombre négatif, nous présenterons la proposée sous la forme

$$x^3 - px + q = 0,$$

p étant toujours positif, et q d'un signe quelconque.

Mettons, pour abréger, la quantité

$$\sqrt{p^3 - 6\tfrac{3}{4}q^2} = r;$$

les deux racines x_1, x_2 seront comprises dans la formule

$$-\frac{x}{2} \pm \frac{rx}{3q-2px}.$$

Or, si l'on remplace la fraction $\frac{Ax+B}{A'x+B'}$ par $\frac{ax+b}{x+c}$, il est évident que cette dernière expression ne pourra renfermer la valeur d'une racine x_1 ou x_2, à moins de satisfaire à l'une des deux équations

$$-\frac{x}{2} + \frac{rx}{3q-2px} = \frac{ax+b}{x+c},$$

$$-\frac{x}{2} - \frac{rx}{3q-2px} = \frac{ax+b}{x+c}.$$

Lorsque la première aura fourni les valeurs des inconnues a, b, c en fonction de p, q et r, il ne s'agira que d'y changer r en $-r$ pour obtenir les valeurs de a, b, c qui conviennent à la seconde des équations précédentes.

On tire de la première

$$\frac{rx}{3q-2px}=\frac{ax+b}{x+c}+\frac{x}{2}=\frac{x^2+(2a+c)x+2b}{2(x+c)},$$

ou bien, en posant $2a+c=a'$,

$$2rx(x+c)=(3q-2px)(x^2+a'x+2b).$$

Développant et réduisant, il vient

$$2px^3+(2r-3q+2pa')x^2+(2rc+4bp-3qa')x-6bq=0,$$

et, après avoir divisé par $2p$,

$$x^3+\left(\frac{2r-3q}{2p}+a'\right)x^2+\left(2b+\frac{2rc-3qa'}{2p}\right)x-\frac{3bq}{p}=0.$$

Cette équation du troisième degré devant nécessairement être identique avec la proposée

$$x^3-px+q=0,$$

il en résulte, pour déterminer les valeurs de a, b, c, les trois relations

$$(6)\quad \frac{2r-3q}{2p}+a'=0,\quad 2b+\frac{2rc-3qa'}{2p}=-p,\quad \frac{3bq}{p}=-q,\quad \text{ou}\quad b=-\frac{p}{3}.$$

La seconde se réduit alors à

$$\frac{2rc-3qa'}{2p}+\frac{p}{3}=0.$$

En y substituant la valeur de a', déduite de la première, on trouvera

$$2rc+\frac{3q}{2p}(2r-3q)+\frac{2p^2}{3}=0,$$

ou, en réduisant,

$$4prc+6qr-9q^2+\frac{4p^3}{3}=0.$$

Or, puisqu'on a

$$4r^2 = 4p^3 - 27q^2,$$

la dernière équation se change en

$$4prc + 6qr + \tfrac{4}{3}r^2 = 0,$$

d'où l'on tire enfin

$$c = -\left(\frac{2r + 9q}{6p}\right).$$

Quant à la valeur de a, on l'obtient directement à l'aide de la première des équations (6), qui donne à cet effet

$$2a = a' - c = \frac{3q - 2r}{2p} - c,$$

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{3q - 2r}{2p} + \frac{2r + 9q}{6p}\right) = \frac{9q - 2r}{3p}.$$

Les valeurs trouvées pour a, b, c, fournissent ainsi pour une des racines qui conviennent au cas de r positif,

$$x_1 = \frac{\left(\frac{9q - 2r}{6p}\right)x - \frac{p}{3}}{x - \frac{9q + 2r}{6p}},$$

ou bien, en donnant à cette expression la forme $\frac{Ax + B}{A'x + B'}$,

$$(7) \qquad x_1 = \frac{(9q - 2r)x - 2p^2}{6px - (9q + 2r)}.$$

En y changeant le signe de r, on en déduira sur-le-champ, pour la valeur de la seconde racine x_2, la fraction

$$(8) \qquad x_2 = \frac{(9q + 2r)x - 2p^2}{6px - (9q - 2r)};$$

ce qui revient à changer A en B, et réciproquement.

6. Telles sont les deux fractions rationnelles qui expriment les deux racines x_1, x_2 en fonction de la troisième x, pourvu toutefois que r soit un nombre commensurable.

Remarquons encore que x pouvant représenter une quelconque des trois racines, il faudra que la formule (7) reproduise celle (8), en y substituant à la place de x la valeur de x_1 donnée par la formule (7) même. C'est ce qui se vérifie en effet; car on aura alors

$$x_2 = \frac{9q - 2r\left[\frac{(9q-2r)x - 2p^2}{6px - (9q+2r)}\right] - 2p^2}{6p\left[\frac{(9q-2r)x - 2p^2}{6px-(9q+2r)}\right] - (9q+2r)}$$
$$= \frac{[(9q-2r)^2 - 12p^3]x + 8p^2 r}{-24prx + (9q+2r)^2 - 12p^3}$$
$$= -\frac{(36qr + 8r^2)x + 8p^2 r}{-24prx + 36qr - 8r^2} = \frac{(9q+2r)x - 2p^2}{6px - (9q-2r)},$$

résultat qui s'accorde avec la formule (8).

Appliquons à présent ces formules à l'équation

$$x^3 - 19x - 30 = 0,$$

où l'on a

$$p^3 = 6859, \quad \frac{27q^2}{4} = 6075, \quad r = \sqrt{784} = 28,$$

$$9q - 2r = -270 - 56 = -326, \quad 9q + 2r = -270 + 56 = -214:$$

donc

$$x_1 = -\left(\frac{326x + 2\times 361}{114x + 214}\right) = -\left(\frac{163x + 361}{57x + 107}\right),$$

expression conforme à celle donnée par M. Lockhart (nº 4).

On trouvera de même

$$x_2 = -\left(\frac{107x + 361}{57x + 163}\right).$$

Mais la première de ces formules suffirait au besoin, puisqu'elle renferme deux racines à la fois, ainsi que nous venons de le montrer d'une manière générale.

7. La formule (7) va nous conduire maintenant à une propriété remarquable appartenant aux racines d'une classe étendue d'équations de la forme

$$x^3 - px + q = 0,$$

lorsqu'on les développe en fractions continues d'après la méthode de Lagrange. Cette propriété consiste en ce que ces fractions (les racines étant supposées toutes les trois réelles), se termineront chacune par les mêmes dénominateurs partiels, ou, en d'autres termes, que le calcul de ces dénominateurs, à l'aide des diverses équations transformées, finira par produire la même transformée pour chacune des trois racines.

C'est ainsi, par exemple, qu'en traitant l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

par la méthode dont il s'agit, on obtiendra pour les deux racines positives comprises entre 1 et 2, les fractions continues

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{y}}}}, \qquad x_1 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{y}}}},$$

et pour la racine négative comprise entre -3 et -4,

$$-x_2 = 3 + \frac{1}{y},$$

y étant la racine positive de l'équation transformée

$$y^3 - 20y^2 - 9y + 1 = 0,$$

de sorte qu'il suffira de connaître le développement de cette racine pour en déduire celui des trois racines x, x_1, x_2 [*].

3. Tâchons d'abord d'établir les conditions qui doivent être véri-

---

[*] Dans une Note sur la résolution des équations numériques, insérée au tome Ier de ce Journal, page 341, M. Vincent, en faisant ressortir la dépendance des trois racines de l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

observe avec raison que la propriété dont jouit l'équation en y mériterait peut-être un examen spécial. Nos recherches renferment l'explication complète de cette propriété, en indiquant les circonstances où elle pourra se réaliser.

fiées par l'équation en x, pour que celle-ci puisse satisfaire à la propriété que nous venons d'énoncer.

Supposons, à cet effet, qu'après avoir obtenu pour une des racines x la série des dénominateurs fournis par les transformées successives jusqu'à celle en y, les fractions réduites qui se rapportent aux deux derniers dénominateurs soient exprimées par $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$; il est évident, d'après la théorie des fractions continues, que la valeur complète de cette racine sera

$$x = \frac{P + Qy}{P' + Q'y}.$$

Désignant de même par $\frac{M}{M'}$, $\frac{N}{N'}$ les deux dernières fractions réduites relatives à une seconde racine x_1, on aura pareillement

$$x_1 = \frac{M + Ny}{M' + N'y},$$

la transformée en y étant supposée la même pour chaque racine.

On tire de la valeur de x,

$$y = \frac{P - P'x}{Q'x - Q};$$

cette expression change la valeur de x_1 en

$$x_1 = \frac{(MQ' - NP')x + NP - MQ}{(M'Q' - N'P')x + N'P - M'Q},$$

qu'on pourra présenter sous la forme simplifiée

$$(9) \qquad x_1 = \frac{Ax + B}{A'x + B'}.$$

Or, puisque P, Q,... sont des nombres entiers, il en sera de même des nombres A, B, A', B'. Donc, en vertu de ce qui a été précédemment démontré, la propriété dont il s'agit exige en premier lieu que la quantité $p^3 - 6\frac{3}{4}q^2$ soit un carré parfait.

Il reste encore à satisfaire à une seconde condition dépendante des propriétés des fractions continues. En effet, les nombres P, Q,..., qui entrent dans la dernière valeur de x, doivent évidemment vérifier les équations

$$PQ' - P'Q = \pm 1, \quad MN' - M'N = \pm 1.$$

En partant de ces relations on s'assure bien vite que les nombres A, B, A', B' fournissent également la relation

$$A'B - AB' = \pm 1.$$

9. Comparons la valeur de x_1, donnée par la formule (9), à celle obtenue (n° **5**) en fonction de p, q, r; et puisqu'une des trois racines est toujours négative, remplaçons dans cette dernière expression x par $-x$, il viendra

$$(10) \qquad x_1 = \frac{(9q - 2r)x + 2p^2}{6px + 9q + 2r},$$

x désignant ici la valeur numérique d'une racine négative de la proposée.

Pour que les deux formules (9) et (10) soient identiques, il faut et il suffit que les nombres A, B, A', B' soient respectivement proportionnels aux nombres

$$9q - 2r, \quad 2p^2, \quad 6p, \quad 9q + 2r,$$

qui les remplacent dans la formule (10). On pourra donc poser

$$kA = 9q - 2r, \quad kB = 2p^2, \quad kA' = 6p, \quad kB' = 9q + 2r,$$

d'où résultera d'abord

$$k^2(AB' - A'B) = 81q^2 - 4r^2 - 12p^3 = -16r^2,$$

en ayant égard à la valeur de r^2. Et puisqu'on peut supposer

$$AB' - A'B = -1,$$

on aura

$$k = 4r,$$

ce qui conduit aux relations

$$9q - 2r = 4Ar, \quad p^2 = 2Br, \quad 3p = 2A'r, \quad 9q + 2r = 4B'r,$$

dont les première et quatrième donnent

$$9q = 2r(A + B'), \quad B' - A = 1;$$

partant,

$$q = \left(\frac{2A + 1}{9}\right) 2r.$$

On a de plus

$$p = \frac{2A'}{3} r, \quad B = \frac{2A'^2}{9} r.$$

Or, en substituant les valeurs de p et q dans l'équation

$$12p^3 - 81q^2 = 12r^2,$$

celle-ci deviendra

$$\frac{32A'^3 r^3}{9} - 4(2A + 1)^2 r^2 = 12r^2,$$

d'où il suit :

$$r = \frac{27 + 9(2A + 1)^2}{8A'^3} = \frac{9}{8}\left[\frac{3 + (2A + 1)^2}{A'^3}\right],$$

$$p = \frac{3}{4}\left[\frac{3 + (2A + 1)^2}{A'^2}\right] = \frac{3(A^2 + A + 1)}{A'^2},$$

$$q = \frac{1}{4}\frac{(2A + 1)[3 + (2A + 1)^2]}{A'^3} = \left(\frac{2A + 1}{3A'}\right) p,$$

$$B = \frac{2A'^2 r}{9} = \frac{1}{4}\frac{[3 + (2A + 1)^2]}{A'} = \frac{A^2 + A + 1}{A'}, \quad B' = 1 + A.$$

Les valeurs de A, A' pouvant être prises arbitrairement, on voit maintenant qu'il existe une infinité d'équations du troisième degré de la forme

$$x^3 - px + q = 0,$$

pour lesquelles la formule

$$x_1 = \frac{Ax + B}{A'x + B'},$$

qui indique la liaison entre deux racines quelconques x, x_1, remplit la condition

$$AB' - A'B = -1,$$

conséquence nécessaire de la propriété énoncée au n° 7.

Quant à la troisième racine x_2, qui aura alors pour expression

$$x_2 = \frac{B'x + B}{A'x + A},$$

il est clair qu'elle y satisfera également, puisqu'on n'a fait qu'échanger entre eux les nombres A, B', ainsi qu'il a déjà été observé au n° **5**.

Donc, pour que la propriété dont il s'agit puisse se présenter, il faut que les nombres p, q reçoivent des valeurs de la forme énoncée ci-dessus. Mais l'inverse aura lieu également, c'est-à-dire que si la condition

$$AB' - A'B = -1$$

est vérifiée, il s'ensuivra nécessairement que le développement en fraction continue de chaque racine conduit à une même transformée. En effet, en remplaçant A, B, A', B' par leurs valeurs en fonction de P, Q,..., on trouvera

$$AB' - A'B = (MN' - M'N)(PQ' - P'Q) = -1,$$

équation à laquelle on ne pourra satisfaire à moins qu'on n'ait séparément

$$MN' - M'N = \pm 1, \quad PQ' - P'Q = \pm 1,$$

chaque facteur du second membre devant être un nombre entier.

Par conséquent, chacune des expressions $\frac{P+Qy}{P'+Q'y}$, $\frac{M+Ny}{M'+N'y}$ exprimera la valeur d'un développement en fraction continue.

10. En faisant $A' = 1$, chaque valeur attribuée à la quantité A fournira des nombres entiers pour p et q.

Soit donc $A = 2$, il viendra

$$p = 21, \quad q = 35, \quad B = 7, \quad B' = 3.$$

L'équation

$$x^3 - 21x + 35 = 0$$

donnera lieu à la formule

$$x_1 = \frac{Ax + B}{A'x + B'} = \frac{2x + 7}{x + 3}, \quad x_2 = \frac{3x + 7}{x + 2}.$$

Si $A = 3$, on aura

$$p = 39,\quad q = 31,\quad B = 13,\quad B' = 4,$$

$$x^3 - 39x + 31 = 0,\quad x_1 = \frac{3x + 13}{x + 4},\quad x_2 = \frac{4x + 13}{x + 3}.$$

Si l'on prend $A = 4$, $A' = 3$, il viendra

$$p = 7,\quad q = 7,\quad B = 7,\quad B' = 5;$$

on tombera alors sur l'équation connue

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

et il viendra

$$x_1 = \frac{4x + 7}{3x + 5},\quad x^2 = \frac{5x + 7}{3x + 4}.$$

Il ne faut pas oublier que, dans les formules précédentes, x désigne la valeur numérique de la racine négative. En y changeant le signe de x, on obtiendra des expressions applicables à chacune des trois racines.

Nous avons déjà donné au n° **7** les valeurs des racines de la dernière équation, exprimées sous la forme de fractions continues. En les réduisant à des fractions ordinaires, on trouvera

$$x = \frac{22y + 5}{13y + 3},\quad x_1 = \frac{19y + 4}{14y + 3},\quad -x = \frac{3y + 1}{y}.$$

Si l'on substitue, dans les deux premières, la valeur de y déduite de la troisième, il en résultera

$$x = \frac{5x - 7}{3x - 4},\quad x_1 = \frac{4x - 7}{3x - 5},$$

valeurs qui, après y avoir changé le signe de x, s'accordent avec celles obtenues ci-dessus.

11. Nous terminerons cette Note en faisant observer que les formules

$$x_1 = \frac{(9q - 2r)x - 2p^2}{6px - (9q + 2r)},\quad x_2 = \frac{(9q + 2r)x - 2p^2}{6px - (9q - 2r)},$$

conduisent à celles-ci :

$$x_1 - \frac{9q - 2r}{6p} = - \frac{8r^2}{3p[6px - (9q + 2r)]},$$

$$x_2 - \frac{9q + 2r}{6p} = - \frac{8r^2}{3p[6px - (9q - 2r)]}.$$

Or, en désignant toujours par x la racine négative, les expressions précédentes deviendront, après y avoir changé le signe de x,

$$x_1 - \frac{9q - 2r}{6p} = \frac{8r^2}{3p(6px + 9q + 2r)},$$

$$x_2 - \frac{9q + 2r}{6p} = \frac{8r^2}{3p(6px + 9q - 2r)}.$$

Si q est positif, x_1 et x_2 le seront également, puisque la proposée présentera alors deux variations de signe. Et si l'on a en même temps

$$9q > 2r,$$

il en résultera nécessairement

$$x_1 > \frac{9q - 2r}{6p}, \quad x_2 > \frac{9q + 2r}{6p}.$$

De plus,

$$x = x_1 + x_2 > \frac{3q}{p}.$$

La connaissance de ces limites inférieures pourra souvent être utile en effectuant le calcul numérique des trois racines, surtout lorsque deux d'entre elles sont comprises entre deux nombres entiers k et $k + 1$. En les appliquant aux racines positives de l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

comprises entre 1 et 2, on a de suite

$$x_1 > \tfrac{4}{3}, \quad x_2 > \tfrac{5}{3}, \quad x > 3.$$