JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Note sur une formule d'Euler

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 161-174.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__161_0>

NOTE
SUR UNE FORMULE D'EULER,

PAR E. CATALAN.

Cette formule est la suivante:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{x^2}{1+x} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\frac{x^3}{1+x} \\ + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}\frac{x^4}{(1+x)^2} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Elle se trouve dans un Mémoire d'Euler, inséré parmi ceux de Saint-Pétersbourg, pour l'année 1811. J'ai essayé de la démontrer d'une manière qui fût à la fois élémentaire et rigoureuse; j'ai cherché ensuite quelques conséquences de cette formule.

I.

Afin de mettre plus d'ordre dans la discussion relative à la convergence, j'établirai dès à présent une série qui est, pour ainsi dire, *conjuguée* de celle d'Euler, et qui est telle, que l'existence de l'une des deux entraîne l'existence de l'autre. Posons [*]

$$(2)\qquad \frac{x^2}{1+x} = \frac{y^2}{1+y};$$

nous obtiendrons

$$x = y, \quad \text{et} \quad x = -\frac{y}{1+y}.$$

---

[*] J'avais rédigé cette Note d'une manière un peu différente, et je n'avais démontré l'équation (1) que pour les valeurs de x inférieures à l'unité. M. Liouville, qui m'a indiqué la transformation (2), m'a ainsi permis de compléter mon travail.

Cette dernière valeur, substituée dans l'équation (1), donne

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}(1+y)^{-n} = 1 - \frac{n}{1}\frac{y}{1+y} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{y^2}{1+y} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\frac{y^3}{(1+y)^2}\\ + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}\frac{y^4}{(1+y)^2} - \ldots\end{aligned}\right.$$

II.

En représentant par $C_{m,q}$ le nombre des combinaisons de m lettres, prises q à q, nous pourrons, dans le cas de n *entier positif*, mettre l'équation (1) sous la forme abrégée

$$(4)\qquad (1+x)^n = \sum\left[C_{n+p-1,\,2p}\frac{x^{2p}}{(1+x)^p} + C_{n+p,\,2p+1}\frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p}\right],$$

p étant une variable qui doit recevoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Cette formule se vérifie aisément pour $n=0$, $n=1$, $n=2$: supposons qu'elle ait été démontrée pour le cas où n est un entier positif quelconque, et prouvons qu'elle subsiste quand on y remplace n par $n+1$.

Si nous multiplions les deux membres par $1+x$, les termes en $\frac{x^{2p-1}}{(1+x)^{p-1}}$, $\frac{x^{2p}}{(1+x)^p}$, $\frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p}$ donneront, étant multipliés,

$$\begin{aligned}C_{n+p-1,\,2p-1}\frac{x^{2p-1}}{(1+x)^{p-1}} + C_{n+p-1,\,2p-1}\frac{x^{2p}(1+x)}{(1+x)^p} + C_{n+p-1,\,2p}\frac{x^{2p}(1+x)}{(1+x)^p}\\ + C_{n+p,\,2p+1}\frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p} + C_{n+p,\,2p+1}\frac{x^{2p+2}}{(1+x)^p}.\end{aligned}$$

Le premier terme et le cinquième ne contiennent, ni $\frac{x^{2p}}{(1+x)^p}$, ni $\frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p}$; en les négligeant, nous aurons, pour la somme des trois autres,

$$\left.\begin{aligned}&C_{n+p-1,\,2p-1}\\ +\,&C_{n+p-1,\,2p}\end{aligned}\right|\frac{x^{2p}}{(1+x)^p}\quad\left.\begin{aligned}+\,&C_{n+p-1,\,2p-1}\\ +\,&C_{n+p-1,\,2p}\\ +\,&C_{n+p,\,2p+1}\end{aligned}\right|\frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p}.$$

Mais, d'après la théorie des combinaisons,

$$\begin{aligned}C_{n+p-1,\,2p-1} + C_{n+p-1,\,2p} &= C_{n+p,\,2p},\\ C_{n+p,\,2p} + C_{n+p,\,2p+1} &= C_{n+p+1,\,2p+1};\end{aligned}$$

donc

$$(1 + x)^{n+1} = \sum \left[C_{n+p,\,2p} \frac{x^{2p}}{(1+x)^p} + C_{n+p+1,\,2p+1} \frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p} \right];$$

et comme cette équation ne diffère de l'équation (4) que par le changement de n en $n+1$, il résulte de ce qui précède que la formule (1) est vérifiée pour toutes les valeurs entières et positives de n. Il en est de même pour la formule (3).

Remarque. Lorsque, n étant entier positif, on suppose $x = -1$, tous les termes du second membre de l'équation (1) deviennent infinis, à l'exception des deux premiers; mais si, avant de donner à x cette valeur particulière, on multiplie les deux membres par $(1+x)^{n-1}$, et qu'on fasse ensuite $x = -1$, on trouve $0 = 0$.

III.

Dans le cas de n entier positif, l'équation (3) peut être représentée par

$$(5) \qquad (1+y)^{-n} = \sum \left[C_{n+p-1,\,2p} \frac{y^{2p}}{(1+y)^p} - C_{n+p,\,2p+1} \frac{y^{2p+1}}{(1+y)^{p+1}} \right].$$

Afin de ramener la quantité entre parenthèses à la forme de celle qui entre dans l'équation (4), je remplace

$$\frac{y^{2p-1}}{(1+y)^p} \quad \text{par} \quad \frac{y^{2p-1}}{(1+y)^{p-1}} - \frac{y^{2p}}{(1+y)^p},$$

et

$$\frac{y^{2p+1}}{(1+y)^{p+1}} \quad \text{par} \quad \frac{y^{2p+1}}{(1+y)^p} - \frac{y^{2p+2}}{(1+y)^{p+1}}.$$

J'obtiens ainsi

$$(1+y)^{-n} = \sum \left[\begin{array}{c} C_{n+p-1,\,2p} \\ + C_{n+p-1,\,2p-1} \end{array} \Bigg| \frac{y^{2p}}{(1+y)^p} - C_{n+p,\,2p+1} \frac{y^{2p+1}}{(1+y)^p} \right],$$

ou

$$(1+y)^{-n} = \sum \left[C_{n+p,\,2p} \frac{y^{2p}}{(1+y)^p} - C_{n+p,\,2p+1} \frac{y^{2p+1}}{(1+y)^p} \right];$$

ou enfin, en développant,

$$(1+y)^{-n} = 1 - \frac{n}{1}y + \frac{(n+1)n}{1.2}\frac{y^2}{1+y} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\frac{y^3}{1+y}$$
$$+ \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}\frac{y^4}{(1+y)^2} - \ldots$$

Cette équation ne diffère de l'équation (1) que par le changement de x en y, et de n en $-n$; donc celle-ci est vraie dans le cas de *n entier négatif*. Observons que dans ce dernier cas, aussi bien que dans celui de l'exposant *entier positif*, le second membre de l'équation (1) n'a qu'un nombre limité de termes.

IV.

Représentons par z la fraction $\frac{x^2}{1+x} = \frac{y^2}{1+y}$; nous pourrons, n étant quelconque, écrire ainsi les équations (1) et (3):

$$(6) \qquad (1+x)^n = \mathrm{M} + \mathrm{N}x,$$

$$(7) \qquad (1+y)^{-n} = \mathrm{M} - \mathrm{N}\frac{y}{1+y};$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{M} = 1 + \frac{n(n-1)}{1.2}z + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}z^2 + \ldots,$$
$$\mathrm{N} = \frac{n}{1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}z + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}z^2 + \ldots.$$

Le terme général de M est de la forme $\frac{(n+i-1)(n+i-2)\ldots(n-i)}{1.2\ldots(2i)}z^i$; son rapport au terme qui le précède est $\frac{(n+i-1)(n-i)}{(2i-1)(2i)}z$, quantité qui deviendra évidemment négative à partir d'une certaine valeur de i. Donc, si l'on peut, abstraction faite du signe, rendre ce rapport α plus petit que l'unité, la série représentée par M sera convergente. Afin de déterminer les valeurs pour lesquelles cette convergence subsiste, posons

$$\alpha = \frac{(i+n-1)(i-n)}{(2i-1)(2i)}z = 1;$$

d'où

$$(4 - z)i^2 - (6 - z)i + n(n - 1)z + 2 = 0.$$

1°. Si l'on a $z > 4$, le premier membre de cette équation deviendra négatif à partir d'une certaine valeur de i; on aura donc, pour de grandes valeurs de cette quantité, $\alpha > 1$, et la série M sera divergente.

2°. Dans le cas de $z = 4$, le premier membre de l'équation sera pareillement négatif pour de grandes valeurs de i, et la série M sera encore divergente.

3°. Mais si l'on a $z < 4$, le rapport α deviendra inférieur à l'unité, et notre série sera convergente.

La même discussion, appliquée à la série N, fait voir qu'elle est convergente pour $z \leqq 4$. Conséquemment, les seconds membres des équations (6) et (7) seront convergents pour toutes les valeurs de x et de y comprises entre les racines des équations

$$\frac{x^2}{1 + x} = 4, \quad \frac{y^2}{1 + y} = 4;$$

savoir,

$$x = 2 \pm 2\sqrt{2}, \quad y = 2 \mp 2\sqrt{2};$$

ou, en séparant les racines,

$$x' = +4{,}828\ldots, \quad y' = -0{,}828\ldots,$$
$$x'' = -0{,}828\ldots, \quad y'' = +4{,}828\ldots.$$

V.

Développons, suivant les puissances ascendantes de x, et par la formule du binôme, les deux membres de l'équation (1). Tant que la variable x sera comprise entre x'' et $+1$, ces deux développements seront convergents; et comme cette équation est démontrée lorsque n est entier, les coefficients des mêmes puissances de x seront égaux dans ce cas; donc, d'après un raisonnement connu, ils le seront encore lorsque l'exposant n sera quelconque. Ainsi, la formule (1) est vraie pour toutes les valeurs de n, et pour les valeurs de x comprises entre

x'' et $+1$. Donc aussi l'équation (3) est démontrée pour un exposant quelconque, et pour les valeurs de y comprises entre y'' et $-\frac{1}{2}$.

De même, si nous développons les deux membres de cette dernière équation, nous reconnaîtrons qu'elle est vraie pour les valeurs de y comprises entre $-\frac{1}{2}$ et y'; d'où il résulte que l'équation subsiste pour les valeurs de x comprises entre $+1$ et x'.

En résumé, *les équations* (1) *et* (3) *sont vraies pour toutes les valeurs de l'exposant n, et pour les valeurs de x et de y comprises entre* $2(1-\sqrt{2})$ et $2(1+\sqrt{2})$.

VI.

Si, dans l'équation (7), nous remplaçons y par x, les équations (6) et (7) donneront

$$\mathrm{M} + \mathrm{N}x = (1+x)^n, \qquad \mathrm{M}(1+x) - \mathrm{N}x = (1+x)^{1-n};$$

d'où

$$\mathrm{M} = \frac{(1+x)^n + (1+x)^{1-n}}{2+x}, \qquad \mathrm{N} = \frac{(1+x)^{1+n} - (1+x)^{1-n}}{x(2+x)}.$$

Ainsi,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &1 + \frac{n(n-1)}{1.2}z + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}z^2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5.6}z^3 + \ldots \\ &\qquad = \frac{(1+x)^n + (1+x)^{1-n}}{2+x}, \end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{n}{1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}z + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}z^2 + \ldots \\ &\qquad = \frac{(1+x)^{1+n} - (1+x)^{1-n}}{x(2+x)}. \end{aligned}\right.$$

Ces deux résultats, indiqués dans le Mémoire d'Euler, donnent en particulier, en prenant $z = 1$, d'où $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$:

$$(10)\quad 1 + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} + \ldots = \frac{(3+\sqrt{5})^n + 2(3-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}(5+\sqrt{5})},$$

$$(11)\quad \frac{n}{1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5} + \ldots = \frac{(3+\sqrt{5})^{n+1} - 4(3-\sqrt{5})^{n-1}}{2^n(5+3\sqrt{5})}.$$

Ces deux dernières formules donneront encore, par l'addition et la soustraction,

$$(12)\quad \begin{cases} 1+\dfrac{n}{1}+\dfrac{n(n-1)}{1.2}+\dfrac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}+\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}+\ldots \\ \qquad =\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\dfrac{5-2\sqrt{5}}{10}\,\dfrac{(3-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-2}}, \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} 1-\dfrac{n}{1}+\dfrac{n(n-1)}{1.2}-\dfrac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}+\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}-\ldots \\ \qquad =\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\dfrac{\sqrt{5}}{10}\,\dfrac{(3-\sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-2}}. \end{cases}$$

VII.

Après avoir mis l'équation (1) sous la forme (4), cherchons, dans le développement du second membre, ordonné suivant les puissances ascendantes de x, le coefficient de x^k.

En représentant toujours par $C_{m,q}$ le coefficient de x^q dans $(1+x)^m$, nous aurons :

Pour le coefficient de x^{k-2p}, dans $(1+x)^{-p}$,

$$(-1)^{k-2p}\,C_{k-p-1,\,p-1};$$

et pour le coefficient de x^{k-2p-1}, dans $(1+x)^{-p}$,

$$(-1)^{k-2p-1}\,C_{k-p-2,\,p-1}.$$

Ainsi, le coefficient de x^k, provenant de

$$C_{n+p-1,\,2p}\cdot\frac{x^{2p}}{(1+x)^p}+C_{n+p,\,2p+1}\,\frac{x^{2p+1}}{(1+x)^p},$$

sera

$$(-1)^{k-2p}\left(C_{n+p-1,\,2p}\times C_{k-p-1,\,p-1}-C_{n+p,\,2p+1}\times C_{k-p-2,\,p-1}\right).$$

Si donc nous donnons à p les valeurs $1, 2, 3, \ldots$, nous aurons

$$(14)\quad \begin{cases} \qquad\qquad \pm\, C_{n,k} \\ =\sum\left(C_{n+p-1,\,2p}\times C_{k-p-1,\,p-1}-C_{n+p,\,2p+1}\times C_{k-p-2,\,p-1}\right), \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\pm \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots k} = \frac{n(n-1)}{1.2}.1 - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}1 \\ &+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}.\frac{k-3}{1} - \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}.\frac{k-4}{1} \\ &+ \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5.6}\,\frac{k-4}{1}\,\frac{k-5}{2} - \ldots \end{aligned}\right.$$

Dans ces deux dernières formules, k est un nombre entier positif; la variable p doit être, dans tous les cas, moindre que $\frac{k+1}{2}$, et si n est entier positif, elle doit être moindre que n. Enfin, on doit prendre le signe $+$ ou le signe $-$, et le nombre des termes doit être *impair* ou *pair*, selon que k est *pair* ou *impair*.

VIII.

Dans ce qui précède, nous avons supposé la variable z positive. Admettons maintenant qu'on lui attribue des valeurs négatives, et examinons dans quel cas les séries M et N seront convergentes.

Nous avons trouvé, dans le § IV, pour l'expression du rapport d'un terme de M à celui qui le précède, $\frac{(n+i-1)(n-i)}{(2i-1)(2i)}z$. Si le facteur z est négatif, il est clair que, pour de grandes valeurs de i, ce rapport sera constamment positif. Donc, à partir d'un certain rang, tous les termes de la série M seront de même signe; et comme le coefficient de z est, abstraction faite du signe, égal à $\frac{i^2-i-n(n-1)}{4\left(i^2-\frac{i}{2}\right)}$, quantité inférieure à $\frac{1}{4}$ lorsque i sera suffisamment grand, il s'ensuit que si la variable z est comprise entre o et -4, la série M sera convergente. L'application de la règle de M. Raabe ferait voir que cette série devient divergente à partir de $z=-4$.

Les mêmes considérations, appliquées à la série N, conduisent aux mêmes conséquences.

Actuellement, l'équation

$$\frac{x^2}{1+x}=z, \qquad \text{ou} \qquad x^2-zx-z=0,$$

donne

$$x = \tfrac{1}{2} z \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} z + 1) z}.$$

Ces deux racines sont imaginaires tant que z est comprise entre 0 et -4; nous pourrons donc les représenter sous cette forme

$$x = -(1 - \alpha) \pm \beta \sqrt{-1},$$

en posant

$$\alpha = \tfrac{1}{2} z + 1, \qquad \beta^2 = -\tfrac{1}{4} z^2 - z.$$

Ces deux dernières équations donnent

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1;$$

ainsi nous pouvons prendre

$$\alpha = \cos \omega, \qquad \beta = \sin \omega;$$

d'où

$$z = -2(1 - \cos \omega) = -4 \sin^2 \tfrac{1}{2} \omega,$$

et

$$1 + x = \cos \omega \pm \sqrt{-1} \sin \omega.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (6), donnent

$$(\cos\omega \pm \sqrt{-1} \sin\omega)^n = 1 - 4 \frac{n(n-1)}{1.2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega + \ldots$$

$$+ \left[\frac{n}{1} - 4 \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega + \ldots\right] \left(-2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega \pm \sqrt{-1} \sin\omega\right).$$

Mais,

$$(\cos\omega \pm \sqrt{-1} \sin\omega)^n = \cos n\omega \pm \sqrt{-1} \sin n\omega, \quad \sin\omega = 2 \sin \tfrac{1}{2}\omega \cos \tfrac{1}{2}\omega;$$

donc, en égalant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$\cos n\omega = 1 \begin{array}{l|l|l} - 4 \dfrac{n(n-1)}{1.2} & \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega + 4^2 \dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} & \sin^4 \tfrac{1}{2}\omega - \ldots \\ - 2 \dfrac{n}{1} & \qquad + 2.4 \dfrac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} & \qquad - \ldots, \end{array}$$

$$(16)\quad \sin n\omega = \sin\omega\left[\begin{aligned}&\frac{n}{1} - 4\,\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\\ &+ 4^2\,\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega - \ldots\end{aligned}\right].$$

On réduit aisément les coefficients des puissances de $\sin\frac{1}{2}\omega$ dans l'avant-dernière équation, et on la ramène alors à la forme

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}\cos n\omega = 1 - 4.\frac{n^2}{1.2}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega + 4^2.\frac{(n+1)n^2(n-1)}{1.2.3.4}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega\\ -4^3.\frac{(n+2)(n+1)n^2(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6\tfrac{1}{2}\omega + \ldots\end{aligned}\right.$$

Dans ces deux formules, l'arc ω doit être compris entre o et π.

IX.

Les séries (16) et (17) conduisent à un grand nombre de résultats plus ou moins remarquables.

D'abord, si nous supposons successivement

$$\omega = \frac{\pi}{3},\qquad \omega = \frac{\pi}{2},\qquad \omega = \frac{2\pi}{3},$$

nous obtiendrons

$$(18)\quad \sin\frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left|\frac{n}{1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3.} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5} - \ldots\right|,$$

$$(19)\quad \cos\frac{n\pi}{3} = 1 - \frac{n^2}{1.2} + \frac{(n+1)n^2(n-1)}{1.2.3.4} - \frac{(n+2)(n+1)n^2(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$(20)\quad \sin\frac{n\pi}{2} = \frac{n}{1} - 2\,\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} + 2^2\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$(21)\quad \cos\frac{n\pi}{2} = 1 - 2\,\frac{n^2}{1.2} + 2^2\,\frac{(n+1)n^2(n-1)}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$(22)\quad \sin\frac{2n\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left[\frac{n}{1} - 3\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} + 3^2\,\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5} - \ldots\right],$$

$$(23)\quad \cos\frac{2n\pi}{3} = 1 - 3\,\frac{n^2}{1.2} + 3^2\,\frac{(n+1)n^2(n-1)}{1.2.3} + \ldots$$

Si, dans les équations (18) et (19), nous faisons

$$n = \tfrac{1}{2}, \quad n = \tfrac{3}{4}, \quad n = \tfrac{3}{2},$$

il viendra

$$(24) \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2^3} + \frac{1.3}{2.4.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.2^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.2^9} + \ldots,$$

$$(25) \qquad \sqrt{3} = 2 - \frac{1}{2.2} - \frac{1}{2.4.2^3} - \frac{1.3}{2.4.6.2^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.2^7} - \ldots,$$

$$(26) \qquad \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} + \frac{7.3.1}{1.2.3.4^3} + \frac{11.7.3.1.5}{1.2.3.4.5.4^5} + \frac{15.11.7.3.1.5.9}{1.2.3.4.5.6.7.4^7} + \ldots,$$

$$(27) \qquad \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{3} - \frac{3}{1.2.4} - \frac{7.3.1}{1.2.3.4.4^3} - \frac{11.7.3.1.5}{1.2.3.4.5.6.4^5} - \ldots,$$

$$(28) \qquad \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2.2^3} - \frac{7.1}{2.4.2^5} - \frac{9.1.3}{2.4.6.2^7} - \frac{11.1.3.5}{2.4.6.8.2^9} - \ldots,$$

$$(29) \qquad 0 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2.2} + \frac{5}{2.4.2^3} + \frac{7.1}{2.4.6.2^5} + \frac{9.1.3}{2.4.6.8.2^7} + \ldots.$$

En prenant, dans les équations (20) et (21),

$$n = \tfrac{1}{3}, \quad n = \tfrac{1}{2}, \quad n = \tfrac{3}{2},$$

nous aurons de même

$$(30) \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + 2\,\frac{4.2}{1.2.3.3^3} + 2^2\,\frac{7.4.2.5}{1.2.3.4.5.3^5} + 2^3\,\frac{10.7.4.2.5.8}{1.2.3.4.5.6.7.3^7} + \ldots,$$

$$(31) \qquad \frac{3}{2}\sqrt{3} = 3 - 2\,\frac{1}{1.2.3} - 2^2\,\frac{4.2}{1.2.3.4.3^3} - 2^3\,\frac{7.4.2.5}{1.2.3.4.5.6.3^5} - \ldots,$$

$$(32) \qquad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} + \frac{1.3.5}{4.8.12} + \ldots.$$

$$(33) \qquad \sqrt{2} = 3 - \frac{5}{4} - \frac{7.1}{4.8} - \frac{9.1.3}{4.8.12} - \frac{11.1.3.5}{4.8.12.16} - \ldots.$$

Les équations (22) et (23) conduiraient à des résultats du même genre.

X.

Dans l'équation (16), divisons les deux membres par $n\omega$, puis supposons que n diminue indéfiniment; à la limite, nous pourrons supposer

$$\frac{\sin n\omega}{n\omega} = 1;$$

d'où

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\omega}{\sin\omega} = \\ 1 + 4\dfrac{1}{2.3}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega + 4^2\dfrac{1.2}{3.4.5}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega + 4^3\dfrac{1.2.3}{4.5.6.7}\sin^6\tfrac{1}{2}\omega + \ldots \end{cases}$$

Cette série donnera, par les hypothèses $\omega = \frac{\pi}{3}$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \frac{2\pi}{3}$,

$$(35)\quad \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left[1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.2}{3.4.5} + \frac{1.2.3}{4.5.6.7} + \ldots\right],$$

$$(36)\quad \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2.4}{5.7.9} + \frac{2.4}{7.9.11} + \frac{2.4.6}{7.9.11.13} + \ldots,$$

$$(37)\quad \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left[1 + \frac{3}{2.3} + \frac{3.6}{3.4.5} + \frac{3.6.9}{4.5.6.7} + \frac{3.6.9.12}{5.6.7.8.9} + \ldots\right].$$

La comparaison des équations (35) et (37) donne encore

$$(38)\quad 1 + \frac{3}{2.3} + \frac{3.6}{3.4.5} + \frac{3.6.9}{4.5.6.7} + \ldots = 2\left[1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.2}{3.4.5} + \frac{1.3.4}{4.5.6.7} + \ldots\right].$$

XI.

Si, dans l'équation (17), nous retranchons les deux membres de 1, nous aurons

$$1 - \cos n\omega = 2\sin^2\tfrac{1}{2}n\omega = 4\frac{n^2}{1.2}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega - 4^2\frac{(n+1)n^2(n-1)}{1.2.3.4}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega + \ldots;$$

d'où

$$2\left(\frac{\sin\frac{n\omega}{2}}{\frac{n\omega}{2}}\right)^2 = \frac{4}{\omega^2}\left[4\frac{1}{1.2}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega - 4^2\frac{(n+1)(n-1)}{1.2.3}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega + \ldots\right];$$

puis, en supposant $n = 0$,

$$(39) \quad \frac{\omega^2}{2} = 4\frac{1}{1.2}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega + 4^2\frac{1}{2.3.4}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega + 4^3\frac{1.2}{3.4.5.6}\sin^6\tfrac{1}{2}\omega + \ldots \text{[*]}.$$

Les équations (34) et (39) permettent, comme on le voit, de développer un arc ou son carré suivant les puissances du sinus de cet arc: elles supposent, ainsi que les précédentes, $\omega < \pi$.

Si, dans l'équation (39), nous supposons successivement

$$\omega = \tfrac{1}{3}\pi, \qquad \omega = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \omega = \tfrac{2}{3}\pi,$$

nous aurons

$$(40) \quad \frac{\pi^2}{18} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1.2}{3.4.5.6} + \frac{1.2.3}{4.5.6.7} + \ldots,$$

$$(41) \quad \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.4} + \frac{2}{3.5.6} + \frac{2}{5.7.8} + \frac{2.4}{5.7.9.10} + \frac{2.4}{7.9.11.12} + \ldots,$$

$$(42) \quad \frac{2}{27}\pi^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{3.6}{3.4.5.6} + \frac{3.6.9}{4.5.6.7.8} + \frac{3.6.9.12}{5.6.7.8.9.10} + \ldots.$$

XII.

Revenant à l'équation (1), je la mets sous la forme

$$\frac{(1+x)^n - 1}{n} = \frac{1}{1}x + \frac{n-1}{1.2}\frac{x^2}{1+x} + \frac{(n+1)(n-1)}{1.2.3}\frac{x^3}{1+x} + \frac{(n+1)(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}\frac{x^4}{(1+x)^2} + \ldots.$$

Si l'exposant n diminue indéfiniment, nous aurons

$$\lim.\frac{(1+x)^n - 1}{n} = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1+x} - \frac{1}{2.3}\frac{x^3}{1+x} + \frac{1}{3.4}\frac{x^4}{(1+x)^2} + \frac{1.2}{3.4.5}\frac{x^5}{(1+x)^2} - \ldots.$$

La fraction $\frac{(1+x)^n - 1}{n}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ quand on y fait

---

[*] La formule (39) est due à *de Stainville*; elle se trouve dans le *Cours d'Analyse* de M. Cauchy. Au reste, la plupart des résultats contenus dans ces derniers paragraphes sont probablement connus: si je les ai rapportés, ce n'a été que pour montrer combien la formule d'Euler est fertile en conséquences.

$n = 0$; mais, en appliquant la règle ordinaire, on trouve que sa limite est égale au logarithme népérien de $1 + x$; donc

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{l}.(1+x) = x &- \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x} - \frac{1}{2.3}\frac{x^3}{1+x} \\ &+ \frac{1}{3.4}\frac{x^4}{(1+x)^2} + \frac{1.2}{3.4.5}\frac{x^5}{(1+x)^2} - \ldots \end{aligned}\right.$$

Cette série est convergente, aussi bien que les précédentes, entre

$$x = 2(1 - \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad x = 2(1 + \sqrt{2}).$$

Elle donne, par exemple,

$$\mathrm{l}.\,2 = 1 - \frac{1}{2.2} - \frac{1}{2.3.2} + \frac{1}{3.4.2^2} + \frac{1.2}{3.4.5.2^2} - \ldots$$