JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 9 (1844), p. 117-132.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1844_1_9__117_0>

MÉMOIRE

SUR LES SURFACES ISOTHERMES ORTHOGONALES;

PAR M. J. BERTRAND.

Les seuls cas particuliers où l'on ait déterminé la forme des surfaces isothermes ont présenté jusqu'ici une circonstance remarquable : je veux parler de l'existence de deux autres systèmes de surfaces coupant les premières à angle droit et orthogonales entre elles, qui peuvent également être considérées comme isothermes. Il m'a semblé utile d'examiner si ce fait peut être érigé en théorème général. La discussion de cette question fait l'objet principal des recherches suivantes.

Je démontre que le théorème en question conduirait à des résultats inadmissibles et qu'il existe certaines conditions sans lesquelles un système de surfaces isothermes ne saurait être conjugué à deux autres systèmes de surfaces isothermes orthogonales entre elles et aux premières. C'est par hasard que ces conditions se sont trouvées remplies dans les cas examinés jusqu'ici.

Les surfaces cylindriques, que je considère en particulier, satisfont toujours aux conditions établies pour des surfaces quelconques. Je démontre en effet que des cylindres isothermes sont toujours coupés orthogonalement par d'autres cylindres également isothermes. Ce théorème était déjà connu, il avait été donné par M. Lamé comme une conséquence analytique du caractère assigné par lui à un système de surfaces isothermes.

Je me suis aussi occupé des surfaces isothermes de révolution; les surfaces orthogonales conjuguées sont, dans ce cas, des plans et d'autres surfaces de révolution dont les méridiens coupent à angle droit les méridiens des premières. J'ai trouvé qu'un système de surfaces isothermes de révolution étant donné, leurs trajectoires orthogonales de révolution ne peuvent être isothermes que dans le cas particulier où leurs méridiens sont les bases de cylindres isothermes. Dans ce cas, les méridiens jouissent d'une propriété remarquable. Les courbes de l'un des systèmes sont coupées par leurs diverses trajectoires orthogonales en des points dont les distances à l'axe de révolution sont dans un rapport constant.

Je commencerai par établir directement les conditions connues pour qu'une série de surfaces puissent être isothermes. Ces conditions sont, comme M. Lamé l'a montré, une conséquence fort simple de l'équation de Fourier, et nous pourrions les prendre pour point de départ; mais il sera utile de les déduire de considérations analogues à celles qui serviront dans le reste du Mémoire.

I.

Considérons dans un corps en équilibre de température la série des surfaces isothermes; prenons sur l'une d'elles un élément superficiel ω, et par les différents points du contour de cet élément, faisons passer des courbes qui coupent à angle droit les surfaces considérées. Ces courbes formeront un canal dans lequel le mouvement de la chaleur s'effectuera indépendamment de ce qui se passe dans les autres parties du solide, car le flux de chaleur à travers ses parois sera, comme on sait, égal à zéro. Il faut par conséquent, pour l'équilibre, que les diverses tranches du canal soient traversées à chaque instant par la même quantité de chaleur. Soit s la longueur du canal comptée à partir de la surface sur laquelle a été pris l'élément ω. La ligne s peut servir à caractériser les diverses surfaces isothermes, car ces surfaces sont, par leur nature, déterminées dès que l'on connaît un de leurs points. Si V désigne la température de la surface qui correspond à l'arc s, et ω' l'élément intercepté sur cette surface par le canal, $\omega' \frac{dV}{ds}$ sera le flux à travers cet élément. Ce flux devant être constant, on aura

$$\omega' \frac{dV}{ds} = C,$$

d'où

$$(1) \qquad dV = \frac{C\,ds}{\omega'},$$

et

$$V = C\int \frac{ds}{\omega'}. \tag{2}$$

Reste à déterminer ω' en fonction de s. Il semble évident que la loi de variation est indépendante de la forme donnée à la section qui sert de base au canal; c'est ce qui résultera d'ailleurs de la manière dont nous allons la calculer.

Quelque petite que soit la surface par les points de laquelle on mène les trajectoires orthogonales, cette surface peut être décomposée en un nombre infini de rectangles infiniment petits par rapport à elle-même. Supposons ces rectangles déterminés par les intersections des lignes de courbure de la surface, et considérons un filet normal aux surfaces isothermes, et ayant pour base l'un d'entre eux, cherchons l'accroissement de la section lorsqu'on passe d'une surface isotherme à une autre infiniment voisine. Toutes les sections seront, comme on sait, des rectangles infiniment petits. Soient α et β les côtés de l'un d'entre eux, R et r les rayons principaux de la surface sur laquelle il se trouve, et enfin ds la distance à la surface infiniment voisine. On aura évidemment

$$\alpha + d\alpha : \alpha :: \mathrm{R} + ds : \mathrm{R},$$
$$\beta + d\beta : \beta :: r + ds : r,$$

d'où

$$d\alpha = \frac{\alpha ds}{\mathrm{R}}, \quad d\beta = \frac{\beta ds}{\mathrm{R}};$$

et, par suite, le rectangle, qui était $\alpha\beta$, devient

$$(\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta) = \alpha\beta\left(1 + \frac{ds}{\mathrm{R}} + \frac{ds}{r}\right);$$

il augmente donc proportionnellement à la somme $\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{r}$, somme que nous appellerons, avec M[lle] Sophie Germain, courbure de la surface au point considéré.

Chacun des rectangles augmentant dans le rapport trouvé ci-dessus, il en sera de même de l'élément ω, et nous pourrons écrire

$$d\omega = \omega ds\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{r}\right), \tag{3}$$

et, par suite,

$$\frac{d\omega}{\omega} = ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

$$(4) \qquad \omega = C_1 e^{\int_0^s ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)};$$

remettant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$(5) \qquad V = \frac{C}{C_1}\int ds\, e^{-\int_0^s ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)}.$$

Cette formule permet de calculer la température d'un point quelconque lorsqu'on connaît la loi de variation de la courbure le long d'une ligne perpendiculaire aux diverses surfaces. Elle apprend, par conséquent, conformément à ce qu'on devait prévoir, que des surfaces choisies au hasard ne peuvent pas être considérées comme isothermes, car en prenant diverses trajectoires orthogonales on trouverait des valeurs différentes de la température aux différents points d'une même surface.

Il est facile de déduire de la formule (5) la condition nécessaire pour que des surfaces données puissent être isothermes; il faut que, s et s' désignant les longueurs des deux trajectoires orthogonales différentes, comptées entre les deux mêmes surfaces, on ait

$$(6) \qquad \int_0^s ds\, e^{-\int_0^s ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)} = \int_0^{s'} ds' e^{-\int_0^{s'} ds\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{r'}\right)}.$$

Différentions les deux membres en prenant pour variable indépendante un paramètre quelconque λ, il vient

$$(7) \qquad \frac{ds}{d\lambda} e^{-\int_0^s ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)} = \frac{ds'}{d\lambda} e^{-\int_0^{s'} ds'\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{r}\right)}.$$

Prenons les logarithmes

$$(8) \qquad l\frac{ds}{d\lambda} - \int_0^s ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) = l\frac{ds'}{d\lambda} - \int_0^{s'} ds'\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{r'}\right).$$

Si nous différentions une seconde fois, il vient

$$(9)\qquad \frac{\frac{d^2s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}} - \frac{ds}{d\lambda}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) = \frac{\frac{d^2s'}{d\lambda^2}}{\frac{ds'}{d\lambda}} - \frac{ds'}{d\lambda}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{r'}\right),$$

et, par suite, le premier membre, c'est-à-dire

$$(10)\qquad \frac{\frac{d^2s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}} - \frac{ds}{d\lambda}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

ne doit dépendre que de la surface que l'on considère, c'est-à-dire qu'il doit être une certaine fonction du paramètre λ. Il est facile de faire coïncider ce résultat avec celui de M. Lamé. λ étant, en effet, le paramètre qui distingue les surfaces les unes des autres, on peut concevoir leur équation résolue par rapport à λ. Soit

$$(11)\qquad \varphi(x, y, z) = \lambda$$

cette équation. La distance ds de deux surfaces infiniment voisines s'exprime facilement au moyen de $d\lambda$. Supposons, en effet, que l'on prenne sur la normale à l'une des surfaces une longueur infiniment petite ds; si x, y, z sont les coordonnées du point par lequel cette normale est menée, les coordonnées de l'extrémité seront

$$x + \frac{ds\,\frac{d\lambda}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}},\quad y + \frac{ds\,\frac{d\lambda}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}},$$

$$z + \frac{ds\,\frac{d\lambda}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}};$$

et, par conséquent, l'accroissement de λ, lorsque l'on passera de la surface à laquelle appartient le point x, y, z, à celle qui passe par l'extrémité de notre petite normale ds, sera

$$\frac{d\lambda}{dx}dx + \frac{d\lambda}{dy}dy + \frac{d\lambda}{dz}dz = ds\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2};$$

d'où l'on tire

$$(12)\qquad ds = \frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}};$$

la différentiation donne

$$\frac{d^2s}{d\lambda^2} = -\frac{\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}{2\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais on a

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 \frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\lambda} = 2\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 \frac{d^2\lambda}{dx^2}\,\frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2},$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 = \frac{d}{dy}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 \frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\lambda} = 2\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 \frac{d^2\lambda}{dy^2}\,\frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2},$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 = \frac{d}{dz}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 \frac{dz}{ds}\frac{ds}{d\lambda} = 2\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 \frac{d^2\lambda}{dz^2}\,\frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2},$$

et, par suite,

$$(13)\qquad \frac{\frac{d^2s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}} = -\frac{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 \frac{d^2\lambda}{dx^2} + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 \frac{d^2\lambda}{dz^2}}{\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right]^2}.$$

En calculant d'après les formules connues la somme $\frac{1}{R} + \frac{1}{r}$, on trouve qu'elle est égale à

$$\frac{\frac{d^2\lambda}{dx^2}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \frac{d^2\lambda}{dy^2}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}{\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}}{\sqrt{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}},$$

et en substituant dans l'expression (10), on voit que les surfaces ne seront isothermes que dans le cas où le rapport

$$\frac{\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2\lambda}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2\lambda}{dz^2}\right)}{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2}$$

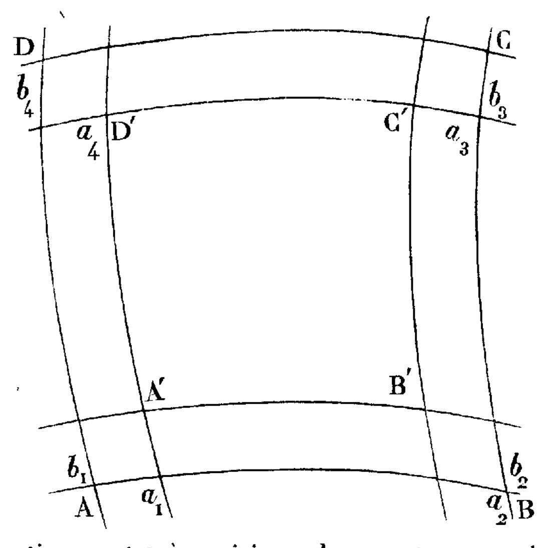
sera une fonction du seul paramètre λ. Réciproquement, si cette condition est remplie, la formule (4) donnera un état calorifique qui, une fois établi, se maintiendra indéfiniment, puisque tous les éléments des différents canaux gagneront à chaque instant autant de chaleur qu'ils en perdront.

II.

Un système de surfaces qui s'enveloppent les unes les autres étant donné, elles ont toujours deux séries de surfaces trajectoires orthogonales qui les coupent suivant leurs lignes de courbure; dans les cas examinés jusqu'ici en prenant pour surfaces primitives des surfaces isothermes, il s'est trouvé que les surfaces orthogonales étaient aussi isothermes; il est important de savoir si ce fait peut être érigé en théorème général. Pour nous assurer qu'il n'en est pas ainsi, nous emploierons la méthode si connue de démonstration par l'absurde, qui consistera ici à admettre d'abord le théorème, pour en déduire des conséquences dont quelques-unes ne seront pas exactes.

Considérons trois séries de surfaces isothermes orthogonales, et soit ABCD un rectangle curviligne de dimensions finies, formé sur l'une d'elles par quatre lignes de courbure, *fig.* 1; menons quatre lignes de

Fig. 1.



courbure respectivement très-voisines des quatre premières, de manière à former aux quatre sommets A, B, C, D, quatre rectangles infiniment petits, dont je désignerai les côtés par $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$; soient i_1, i_2, i_3, i_4 les distances comptées sur les normales aux points A, B, C, D, entre la surface considérée et la surface infiniment voisine.

Puisque, par hypothèse, les surfaces normales à ABCD, et dont l'une a AD pour trace, sont des surfaces isothermes, on peut concevoir sur chacune de ces surfaces une température telle qu'il y ait équilibre calorifique, et telle, par conséquent, qu'en considérant le filet compris entre la surface ABCD, la surface voisine appartenant au même système et les deux surfaces orthogonales à celle-là passant par BA et B'A', les sections faites sur ce filet par les deux surfaces AD et CB soient traversées par les mêmes quantités de chaleur. Si donc dV_1 désigne la différence de température entre les points de la surface AD et ceux de la surface A'D', et dV_2 la différence analogue pour les surfaces BC et B'C', on aura, d'après l'expression connue du flux,

$$(a)\qquad \frac{b_1 i_1 dV_1}{a_1} = \frac{b_2 i_2 dV_2}{a_2},$$

$$(b)\qquad \frac{b_3 i_3 dV_2}{a_3} = \frac{b_4 i_4 dV_1}{a_4}.$$

On aura, par des considérations analogues, en remarquant que les surfaces AB, CD sont, par hypothèse, isothermes, et désignant par dV'_1, dV'_2 les accroissements de température qui auraient lieu dans l'état d'équilibre, si l'on passait de la surface AB à la surface A'B' et de la surface C'D' à la surface CD,

$$(c)\qquad \frac{a_1 i_1 dV'_1}{b_1} = \frac{a_4 i_4 dV'_2}{b_4},$$

$$(d)\qquad \frac{a_3 i_3 dV'_2}{b_3} = \frac{a_2 i_2 dV'_1}{b_2}.$$

Ces quatre équations étant multipliées membre à membre, donnent

$$(e)\qquad i_1^2\, i_3^2 = i_2^2\, i_4^2,$$

$$(f)\qquad i_1 : i_2 :: i_4 : i_3.$$

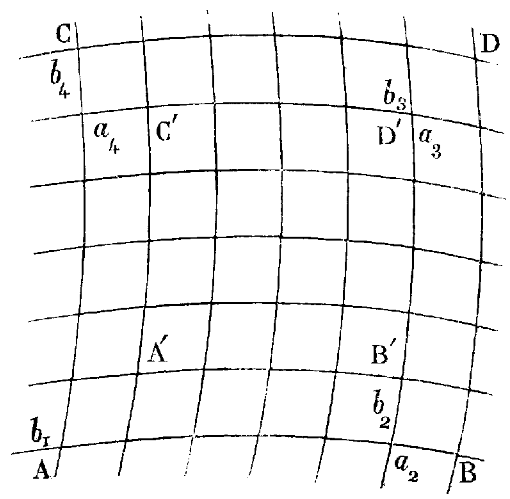
Nous avons donc ce théorème :

Dans un système de surfaces isothermes orthogonales, si sur l'une quelconque des surfaces on considère un rectangle de dimensions finies, *formé par quatre lignes de courbure, les distances des quatre sommets de ce rectangle à la surface infiniment voisine de celle qui le renferme, formeront une proportion.*

D'après cela, si l'on admettait qu'une série de surfaces isothermes eût toujours des trajectoires orthogonales isothermes, il en résulterait que l'une des surfaces isothermes d'un corps étant connue, ainsi que les distances à la surface infiniment voisine le long de deux lignes de courbure perpendiculaires l'une à l'autre, on pourrait déterminer la valeur de cette distance pour un point quelconque pris sur la surface; il suffirait, en effet, de faire passer deux lignes de courbure par le point considéré, et la distance cherchée serait une quatrième proportionnelle à celles qui correspondent aux trois autres sommets du rectangle formé par ces lignes et par les deux premières. Mais cette conséquence est inadmissible; on sait, en effet, qu'il est toujours possible de se donner deux surfaces isothermes consécutives arbitrairement, et que la loi des températures dans le reste du corps est alors déterminée.

Le théorème exprimé par l'équation (f) est relatif à deux surfaces isothermes infiniment voisines, mais on peut en déduire un autre, qui donne une propriété commune à toutes les surfaces qui peuvent entrer dans un système de surfaces orthogonales triplement isotherme. Considérons sur l'une des surfaces deux lignes de courbure orthogonales AB, AC, *fig.* 2, et deux lignes voisines A′B′, A′C′; on peut évidemment con-

Fig. 2.



struire des lignes de courbure infiniment rapprochées de telle manière que les rectangles compris entre deux lignes consécutives et les courbes AB, A'B' soient tous semblables entre eux. On pourra également concevoir des lignes de courbure perpendiculaires à AC qui divisent la bande infiniment étroite comprise entre AC et A'C' en rectangles semblables entre eux et semblables aussi aux précédents. Les différentes lignes qui déterminent ces rectangles étant prolongées, décomposent la surface considérée en éléments infiniment petits, et je dis que ces éléments seront tous des rectangles semblables entre eux.

Considérons, par exemple, le rectangle DD'; si tous ceux qui sont compris entre AB, A'B', AC, A'C', sont semblables entre eux, il sera semblable à chacun d'eux.

Désignons par (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4) les côtés des quatre rectangles (AA'), (BB'), (DD'), (CC'), et soient i_1, i_2, i_3, i_4 les distances des surfaces infiniment voisines comptées aux points A, B, C, D; l'équilibre du canal AC, A'C', dans le corps qui aurait ses surfaces isothermes perpendiculaires à ABCD et passant par AB, A'B', exige que l'on ait

$$(g) \qquad \frac{a_1 i_1 dV_1}{b_1} = \frac{a_4 i_4 dV_2}{b_4},$$

on aura de même

$$(h) \qquad \frac{a_2 i_2 dV_1}{b_2} = \frac{a_3 i_3 dV_2}{b_3}.$$

Si donc

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_4}{b_4},$$

on tire de là, en ayant égard à la proportion

$$i_1 : i_2 :: i_4 : i_3,$$

$$(i) \qquad \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Nous avons donc ce théorème :

Toute surface susceptible de faire partie d'un système de surfaces orthogonales isothermes jouit de la propriété de pouvoir être découpée par ses lignes de courbure en rectangles semblables entre eux. Le rapport des côtés de ces rectangles peut être choisi arbitrairement, et l'on peut faire en sorte, par exemple, qu'ils soient tous des carrés.

L'ellipsoïde pouvant toujours entrer dans un système de surfaces isothermes orthogonales, jouit de la propriété précédente, et peut être divisé en carrés par ses lignes de courbure.

III.

Lorsque les surfaces isothermes d'un corps sont cylindriques, les surfaces orthogonales conjuguées sont d'autres cylindres et des plans perpendiculaires aux génératrices; pour que deux séries de cylindres orthogonaux soient toutes deux isothermes, il faut, d'après ce que nous venons de dire, que les traces de ces cylindres sur les plans perpendiculaires à leurs génératrices, ou, en d'autres termes, que les bases de ces cylindres forment des rectangles semblables entre eux, pourvu, bien entendu, que ces bases soient convenablement espacées.

Il est facile de voir que cette condition sera toujours remplie et qu'elle est même nécessaire et suffisante pour que les premiers cylindres soient isothermes.

Si nous considérons, en effet, la propagation de la chaleur dans un plan, soient A, A′, A″ une série de lignes isothermes, *fig.* 3, B, B′, B″

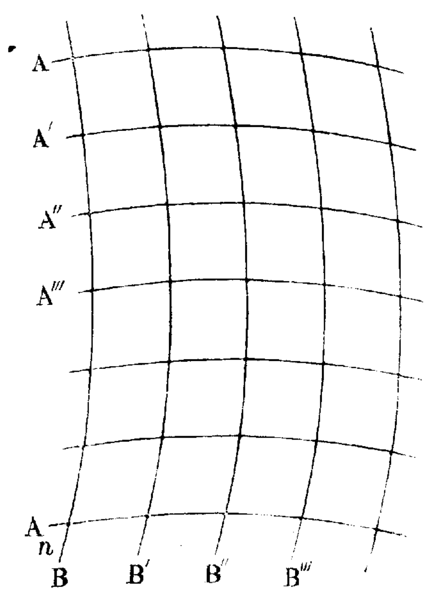


Fig. 3.

leurs trajectoires orthogonales; considérons le mouvement de la chaleur dans le filet compris entre B et B'. A et A_4 étant deux lignes isothermes quelconques, si ω est la portion de A interceptée dans le filet BB', et ω_4 la portion correspondante de A_4, en désignant par dV_1 l'accroissement de température lorsque l'on passe de A à la courbe voisine, et par dV_4 l'accroissement correspondant pour la ligne A_4; et enfin, en nommant i_1 et i_4 les portions de la ligne B comprises entre les mêmes courbes, on aura

$$(\alpha) \qquad \frac{\omega dV}{i_1} = \frac{\omega_4 dV_4}{i_4}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega}{i_1} = \frac{\omega_4}{i_4} :: dV_4 : dV;$$

si ω', ω'_4, i'_1, i'_4 sont les quantités analogues à ω, ω_4, i_1, i_4, pour un autre filet quelconque orthogonal aux lignes A_1, A_2,..., on aura

$$(\beta) \qquad \frac{\omega'}{i'} : \frac{\omega'_4}{i'_4} :: dV_4 : dV,$$

donc

$$(\gamma) \qquad \frac{\omega}{i_1} : \frac{\omega_4}{i_4} :: \frac{\omega'}{i'_1} : \frac{\omega'_4}{i'_4}.$$

Si, par conséquent,

$$\frac{\omega}{i_1} = \frac{\omega'}{i'_1} = \frac{\omega_4}{i_4},$$

$\frac{\omega'_4}{i'_4}$ sera égal à chacun de ces trois rapports. Il en résulte que si l'on choisit les lignes A, A',..., et les trajectoires B, B',... de manière que les rectangles compris entre A, A',... et ceux compris entre B, B',... soient semblables entre eux, ce qui évidemment est toujours possible, il arrivera que tous les autres rectangles seront semblables à ceux-là, et par conséquent semblables les uns aux autres.

Réciproquement, si l'on a sur un plan une série de lignes se coupant toutes à angle droit, si tous les rectangles formés par leurs intersections sont semblables entre eux, un quelconque des systèmes peut être considéré comme composé de lignes isothermes.

Soient, en effet, les lignes A, A',..., A_4, B, B',..., B_4, *fig.* 3; si nous supposons isothermes les lignes A, A',..., A_4, la température en un point de chacune d'elles pourra être déterminée par la considération du mouvement de la chaleur dans un canal compris entre deux courbes voisines B, B'. La condition pour que les lignes A, A',... puissent être isothermes est, comme nous l'avons expliqué plus haut, que ces calculs, faits successivement pour les différents filets, conduisent aux mêmes résultats. C'est précisément ce qui arrivera ici, car la condition qui donne, dans un filet, l'accroissement de température quand on passe d'une courbe à la suivante, est

$$\frac{\omega d\mathrm{V}}{i} = \mathrm{C}.$$

Si donc $\frac{\omega}{i}$ est constant pour tous les filets, on pourra déterminer, pour chacun d'eux, la constante arbitraire C de manière à rendre aussi $d\mathrm{V}$ constant, et indépendant du filet considéré.

Nous retombons ainsi sur ce théorème, déjà démontré par M. Lamé :

A un système de courbes planes isothermes, ou, si l'on veut, de cylindres isothermes, correspondent toujours des trajectoires orthogonales isothermes.

Si les surfaces isothermes sont de révolution, les surfaces orthogonales conjuguées doivent les couper suivant les méridiens et des parallèles; ce sont, par conséquent, des plans passant par l'axe de révolution et d'autres surfaces de révolution dont les méridiens coupent à angle droit ceux des premières. Si nous admettons que ces trois séries de surfaces soient à la fois isothermes, il faudra, d'après notre théorème, que deux quelconques d'entre elles puissent tracer sur la troisième des rectangles semblables entre eux. Par conséquent, les méridiens des surfaces de révolution doivent former, si on les dispose convenablement, des rectangles semblables entre eux; ce sont donc les bases de cylindres isothermes.

Nous avons donc ce théorème :

Des surfaces isothermes de révolution ne peuvent avoir pour trajectoires orthogonales conjuguées d'autres surfaces isothermes que dans le cas où leurs méridiens forment un système de lignes isothermes.

Lorsque cette condition sera remplie, il faudra, en vertu de l'équation (f) du § II, qu'en considérant un rectangle de dimensions finies formé par quatre méridiens, les distances des quatre sommets de ce rectangle au plan méridien infiniment voisin forment les quatre termes d'une proportion. Mais ces distances sont proportionnelles aux rayons des parallèles correspondants aux quatre points.

Nous avons donc ce théorème :

Deux systèmes de lignes isothermes orthogonales étant donnés, pour que leur rotation autour d'un axe engendre des surfaces de révolution isothermes, il faut que les distances à l'axe des quatre sommets d'un rectangle formé par les lignes données soient les quatre termes d'une proportion.

On peut vérifier que cette condition est remplie par un système de sections coniques homofocales; les lignes sont, comme on sait, isothermes, et leur révolution autour de leurs axes engendre des surfaces isothermes; si donc on prend un rectangle formé par deux hyperboles et deux ellipses, les ordonnées de ses quatre sommets doivent former une proportion. C'est précisément ce qui résulte d'un théorème de M. Chasles, d'après lequel une même hyperbole coupe toutes les ellipses en des points *correspondants* dont les ordonnées sont dans un rapport constant avec les axes des ellipses sur lesquelles ils se trouvent.

IV.

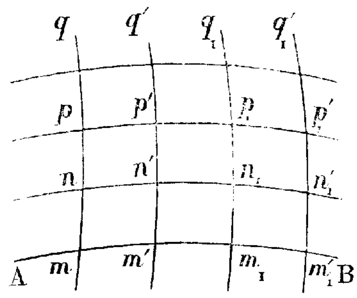
J'indiquerai le moyen de déduire des propositions précédentes quelques théorèmes de géométrie pure relatifs à l'ellipsoïde.

Si l'on considère un système de surfaces isothermes, nous avons vu, § Ier, que la fonction

$$(\alpha)\qquad \frac{\frac{d^2s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}} - \frac{ds}{d\lambda}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

dans laquelle s, λ, R, r conservent la signification indiquée dans ce paragraphe, doit avoir la même valeur pour tous les points d'une même surface. λ désigne un paramètre quelconque dont la valeur puisse caractériser les diverses surfaces isothermes, et nous pouvons évidemment le choisir de manière à rendre carrés tous les rectangles compris entre deux courbes trajectoires orthogonales aux diverses surfaces isothermes menées par deux points infiniment voisins m, m', *fig.* 4, d'une même ligne

Fig. 4.



de courbure, et les surfaces qui correspondent à des accroissements égaux de λ. Cela étant, si par deux autres points voisins m_1, m'_1, on mène des trajectoires orthogonales aux surfaces isothermes, et que la distance de ces points soit tellement choisie que le rectangle $m_1 m'_1 n_1 n'_1$ soit carré, il résulte des propositions démontrées plus haut, que, dans le cas du système triplement isotherme, tous les rectangles n_1, p_1, n'_1, p'_1, etc., se trouveront aussi des carrés.

Par conséquent, les quantités ds, d^2s qui entrent dans la formule (α), peuvent s'exprimer au moyen des côtés $m_1 m'_1$, $n_1 n'_1$, $p_1 p'_1$. On a évidemment

$$ds = m_1 m'_1,$$
$$ds + d^2s = n_1 n'_1.$$

Mais en remarquant que les tangentes aux courbes $m_1 n_1$, $m'_1 n'_1$ vont se rencontrer à celui des centres de courbure de la surface qui correspond à la ligne de courbure AB, on a

$$\frac{n_1 n'_1}{m_1 m'_1} = \frac{\mathrm{R} + ds}{\mathrm{R}},$$

d'où

$$(\beta) \qquad \frac{n_1 n'_1 - m_1 m'_1}{m_1 m'_1} = \frac{d^2s}{ds} = \frac{ds}{\mathrm{R}},$$

et par conséquent

$$(\gamma) \qquad \frac{\frac{d^2s}{d\lambda^2}}{\frac{ds}{d\lambda}} = \frac{\frac{ds}{d\lambda}}{\mathrm{R}},$$

ce qui, substitué dans l'expression (α), la réduit à

$$(\delta) \qquad \frac{ds}{d\lambda}\frac{1}{r};$$

par suite, cette expression doit être constante pour tous les points de la ligne AB.

Nous avons donc ce théorème :

Dans un système de surfaces isothermes orthogonales sur une même surface et sur une même ligne de courbure, la distance de deux surfaces infiniment voisines varie proportionnellement au rayon de courbure correspondant aux lignes de courbure de l'autre système.

On sait d'ailleurs que la distance de deux surfaces est réciproquement proportionnelle au flux de chaleur. Par conséquent,

Le flux de chaleur varie, sur une même ligne de courbure, en raison inverse du rayon de courbure correspondant à la ligne de l'autre système.

Si l'on rapproche ce théorème de l'un de ceux qui ont été indiqués plus haut, savoir, que les flux de chaleur aux quatre sommets d'un rectangle formé par quatres lignes de courbure sont en proportion, on aura le théorème suivant :

Si sur une surface du second ordre on considère un rectangle formé par quatre lignes de courbure, quatre des rayons de courbure de la surface, correspondants aux sommets de ce rectangle, forment une proportion. Les quatre autres rayons de courbure forment de même une proportion, et, par suite, le produit de quatre d'entre eux pris dans un certain ordre est égal au produit des quatre autres.

Ce dernier théorème présente quelque analogie avec des propositions récemment démontrées dans le Journal de M. Crelle [*].

---

[*] Voyez un Mémoire de M. Joachimstahl, Journal de M. Crelle, t. XXVI, p. 155.