JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OSSIAN BONNET

Note sur la convergence et la divergence des séries

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 73-109.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__73_0>

NOTE

SUR LA CONVERGENCE ET LA DIVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. OSSIAN BONNET,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

M. Augustus de Morgan et M. Bertrand ont trouvé, chacun de leur côté [*], plusieurs systèmes de règles servant à reconnaître d'une manière certaine la convergence ou la divergence des séries à termes positifs. Je suis parvenu depuis à quelques autres règles du même genre qui sont d'une application assez simple. L'exposition de ces nouvelles règles est le principal objet de cette Note.

I.

J'avertis, une fois pour toutes, que dans ce qui va suivre les séries sont toujours supposées à termes positifs.

Lemme I. Soient deux séries

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$
$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

1°. Si la série U est convergente, et que, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un nombre donné, on ait

$$v_m < cu_m,$$

c étant une constante finie, la série V sera aussi convergente.

[*] Voyez le *Traité de calcul différentiel* de M. de Morgan, publié à Londres en 1839, et un Mémoire de M. Bertrand, inséré dans le tome VII de ce Journal.

2°. Si la série U est divergente, et que, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un nombre donné, on ait

$$v_m > cu_m,$$

c étant une constante finie, la série V sera aussi divergente.

Lemme II. Soient deux séries

$$\mathrm{U} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$
$$\mathrm{V} = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

1°. Si la série U est convergente, et que l'on ait

$$\frac{v_{m+1}}{v_m} < \frac{u_{m+1}}{u_m},$$

pour toutes les valeurs de m qui surpassent un nombre donné, la série V sera aussi convergente.

2°. Si la série U est divergente, et que l'on ait

$$\frac{v_{m+1}}{v_m} > \frac{u_{m+1}}{u_m},$$

pour toutes les valeurs de m qui surpassent un nombre donné, la série V sera aussi divergente.

Ces deux lemmes sont trop simples pour que nous nous arrêtions à les démontrer.

Lemme III. Les séries

$$(1) \qquad 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots,$$

$$(2) \qquad 1 + \frac{1}{2(l2)^\alpha} + \frac{1}{3(l3)^\alpha} + \frac{1}{4(l4)^\alpha} + \ldots,$$

$$(3) \qquad 1 + \frac{1}{2l2(ll2)^\alpha} + \frac{1}{3l3(ll3)^\alpha} + \frac{1}{4l4(ll4)^\alpha} + \ldots,$$

$$(4) \qquad 1 + \frac{1}{2l2ll2(lll2)^\alpha} + \frac{1}{3l3ll3(lll3)^\alpha} + \frac{1}{4l4ll4(lll4)^\alpha} + \ldots,$$

. . . .

. . . .

sont, toutes, convergentes ou divergentes, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

Démonstration. Je me servirai de la proposition suivante due à M. Cauchy.

« Les deux séries

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_m + \ldots,$$

$$u_1 + \nu u_\nu + \nu^2 u_{\nu^2} + \ldots + \nu^{m-1} u_{\nu^{m-1}} + \ldots,$$

» où ν est un nombre entier positif quelconque, sont en même temps
» convergentes ou divergentes, pourvu que les termes de la première
» soient, à partir d'une certaine limite, positifs et décroissants. »

1°. La série (1) est convergente ou divergente en même temps que

$$1 + \frac{\nu}{\nu^\alpha} + \frac{\nu}{\nu^{2\alpha}} + \ldots + \frac{\nu^m}{\nu^{m\alpha}} + \ldots,$$

ou

$$1 + \frac{1}{\nu^{\alpha-1}} + \frac{1}{\nu^{2(\alpha-1)}} + \ldots + \frac{1}{\nu^{m(\alpha-1)}} + \ldots$$

Or cette dernière série est une progression géométrique qui a $\frac{1}{\nu^{\alpha-1}}$ pour raison, elle est donc convergente, ou divergente, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1 ; par conséquent il en est de même de la série (1).

2°. La série (2) est convergente ou divergente en même temps que

$$1 + \frac{1}{(l\nu)^\alpha} + \frac{1}{(l\nu^2)^\alpha} + \frac{1}{(l\nu^3)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(l\nu^m)^\alpha} + \ldots,$$

ou

$$1 + \frac{1}{(l\nu)^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{m^\alpha} + \ldots\right).$$

Or, d'apres ce que nous venons de démontrer, cette dernière série est convergente ou divergente, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1 ; il en est donc de même de la série (2).

3°. La série (3) est convergente ou divergente en même temps que

$$1 + \frac{1}{l\nu\,(ll\nu)^\alpha} + \frac{1}{l\nu^2(ll\nu^2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{l\nu^m\,(ll\nu^m)^\alpha} + \ldots,$$

ou

$$1+\frac{1}{l\nu(ll\nu)^{\alpha}}+\frac{1}{l\nu}\left[\frac{1}{2(l2+ll\nu)^{\alpha}}+\frac{1}{3(l3+ll\nu)^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{m(lm+ll\nu)^{\alpha}}+\ldots\right].$$

Or, en laissant de côté les deux premiers, les termes de cette série sont, à partir d'une certaine limite, respectivement plus petits que ceux de la série

$$\frac{1}{l\nu}\left[\frac{1}{2(l2)^{\alpha}}+\frac{1}{3(l3)^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{m(lm)^{\alpha}}+\ldots\right],$$

et respectivement plus forts que ceux de la série

$$\frac{1}{l\nu}\left[\frac{1}{2(l2+l2)^{\alpha}}+\frac{1}{3(l3+l3)^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{m(lm+lm)^{\alpha}}+\ldots\right],$$

ou

$$\frac{1}{2^{\alpha}l\nu}\left[\frac{1}{2(l2)^{\alpha}}+\frac{1}{3(l3)^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{m(lm)^{\alpha}}+\ldots\right],$$

pourvu, toutefois, que l'on ait

$$ll\nu>0,\quad \text{ou}\quad \nu>e,$$

ce que l'on peut toujours supposer. D'un autre côté, d'après ce que nous avons démontré, la première de ces séries est convergente quand α est plus grand que 1, et la seconde est divergente quand α n'est pas plus grand que 1; la série (3) est donc convergente ou divergente, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

4°. La série (4) est convergente ou divergente en même temps que

$$1+\frac{1}{l\nu ll\nu(lll\nu)^{\alpha}}+\frac{1}{l\nu^{2}ll\nu^{2}(lll\nu^{2})^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{l\nu^{m}ll\nu^{m}(lll\nu^{m})^{\alpha}}+\ldots,$$

ou

$$1+\frac{1}{l\nu ll\nu(lll\nu)^{\alpha}}+\frac{1}{l\nu}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2(l2+ll\nu)(ll2+lll\nu)^{\alpha}}+\frac{1}{3(l3+ll\nu)(ll3+lll\nu)^{\alpha}}+\ldots\\&+\frac{1}{m(lm+ll\nu)(llm+lll\nu)^{\alpha}}+\ldots\end{aligned}\right\}.$$

Or, en laissant de côté les deux premiers, les termes de cette série sont, à partir d'une certaine limite, respectivement plus petits que ceux de la série

$$\frac{1}{l\nu}\left[\frac{1}{2l2(ll2)^\alpha}+\frac{1}{3l3(ll3)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{mlm(llm)^\alpha}+\ldots\right],$$

et respectivement plus forts que ceux de la série

$$\frac{1}{l\nu}\left[\frac{1}{2(l2+l2)(ll2+ll2)^\alpha}+\frac{1}{3(l3+l3)(ll3+ll3)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{m(lm+lm)(llm+llm)^\alpha}+\ldots\right],$$

ou

$$\frac{1}{2^{\alpha+1}l\nu}\left[\frac{1}{2l2(ll2)^\alpha}+\frac{1}{3l3(ll3)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{mlm(llm)^\alpha}+\ldots\right],$$

pourvu, toutefois, que l'on ait

$$ll\nu > 0, \quad \text{ou} \quad \nu > e^e,$$

ce que l'on peut toujours supposer. D'un autre côté, d'après ce que nous avons démontré, la première de ces séries est convergente quand α est plus grand que 1, et la seconde est divergente quand α n'est pas plus grand que 1; la série (4) est donc convergente ou divergente, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

On emploierait le même raisonnement pour les séries (5), (6), etc.

Le lemme précédent a été démontré par M. Bertrand, mais la démonstration qui précède est, je crois, plus simple et plus élémentaire que la sienne.

II.

Soit, actuellement, une série

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

dont il faut reconnaître la convergence ou la divergence.

Règle. Considérez les deux expressions

$$m^{1+\varepsilon}u_m, \quad mu_m,$$

où ε représente un nombre positif aussi petit qu'on veut, mais différent de zéro, et déterminez les valeurs

$$a_0, \quad a'_0,$$

qu'elles prennent quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_0 n'est pas infini, et divergente si a'_0 n'est pas zéro. Si a_0 est infini et qu'en même temps a'_0 soit zéro, considérez les deux expressions

$$m(lm)^{1+\varepsilon} u_m, \quad mlm\, u_m,$$

où ε représente un nombre positif aussi petit qu'on veut, mais différent de zéro, et déterminez les valeurs

$$a_1, \quad a'_1,$$

qu'elles prennent quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_1 n'est pas infini, et divergente si a'_1 n'est pas zéro. Si a_1 est infini et qu'en même temps a'_1 soit zéro, considérez les deux expressions

$$mlm(llm)^{1+\varepsilon} u_m, \quad mlmllm\, u_m,$$

où ε représente un nombre positif aussi petit qu'on veut, mais différent de zéro, et calculez les valeurs

$$a_2, \quad a'_2,$$

qu'elles prennent quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_2 n'est pas infini, et divergente si a'_2 n'est pas zéro. Si a_2 est infini et qu'en même temps a'_2 soit zéro, considérez les deux expressions

$$mlmllm(lllm)^{1+\varepsilon} u_m, \quad mlmllmlllm\, u_m,$$

et continuez de la même manière.

Démonstration. Supposons, en premier lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,... soit différente de l'infini; on aura alors, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$m^{1+\varepsilon} u_m < k, \quad m(lm)^{1+\varepsilon} u_m < k, \quad mlm(llm)^{1+\varepsilon} u_m < k, \ldots,$$

où k est un nombre déterminé et fini. Or on déduit successivement de ces inégalités,

$$u_m < \frac{k}{m^{1+\varepsilon}}, \quad u_m < \frac{k}{m\,(lm)^{1+\varepsilon}}, \quad u_m < \frac{k}{mlm\,(llm)^{1+\varepsilon}}, \ldots.$$

Cela prouve (*lemmes* I et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est convergente.

Supposons, en second lieu, qu'une des limites a'_0, a'_1, $a'_2, \ldots$ soit différente de zéro; on aura alors, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$mu_m > k, \quad mlm\,u_m > k, \quad mlmllm\,u_m > k, \ldots,$$

où k est un nombre déterminé positif et différent de zéro. Or on déduit successivement de ces inégalités,

$$u_m > \frac{k}{m}, \quad u_m > \frac{k}{mlm}, \quad u_m > \frac{k}{m\,lm\,llm}, \ldots.$$

Cela prouve (*lemmes* I et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est divergente.

Remarque. Les règles précédentes doivent, dans tous les cas, faire connaître si une série est convergente ou divergente, car le terme général u_m de la série considérée sera toujours une certaine fonction de m, dont le degré, quel qu'il soit, finira par être plus grand ou plus petit que celui de la fraction $\frac{1}{m\,lm\,llm\ldots}$, où le nombre des facteurs du dénominateur croît toujours. Il ne peut y avoir doute que dans le cas infiniment rare d'une série dont le terme général aurait le même degré par rapport à m que la fraction $\frac{1}{m\,lm\,llm\ldots}$, où le nombre des facteurs du dénominateur est infini. Ce cas est en quelque sorte le point de jonction des séries convergentes et des séries divergentes.

III.

Faisons quelques applications des règles précédentes.

Exemple I. Soit la série

$$U = 1 + \frac{1}{\sqrt[2]{2^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4^5}} + \ldots.$$

On a, dans ce cas,

$$u_m = \frac{1}{\sqrt[m]{m^{m+1}}} = \frac{1}{m^{1+\frac{1}{m}}},$$

par conséquent,

$$m^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m^{\varepsilon}}{m^{\frac{1}{m}}}, \quad \text{et} \quad m u_m = \frac{1}{m^{\frac{1}{m}}}.$$

Or,

$$m^{\frac{1}{m}} = 1, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

la série est donc divergente.

Exemple II. Soit la série

$$U = 1 + \frac{1^n}{2^{n+\alpha}} + \frac{2^n}{3^{n+\alpha}} + \frac{3^n}{4^{n+\alpha}} + \ldots$$

On a

$$u_m = \frac{(m-1)^n}{m^{n+\alpha}} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n \frac{1}{m^{\alpha}},$$

par conséquent,

$$m^{1+\varepsilon} u_m = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n \frac{1}{m^{\alpha-1-\varepsilon}}, \quad \text{et} \quad m u_m = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n \frac{1}{m^{\alpha-1}}.$$

Or, supposons d'abord $\alpha > 1$, nous aurons

$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^n \frac{1}{m^{\alpha-1-\varepsilon}} = 0, \quad \text{pour } m = \infty,$$

ε étant pris suffisamment petit; la série est donc alors convergente.

Soit, en second lieu, $\alpha \leqq 1$; on aura

$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^n \frac{1}{m^{\alpha-1}} = \infty, \text{ ou } 1, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

la série est donc alors divergente: ainsi la série proposée est convergente ou divergente suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

Exemple III. Considérons la série

$$U = \left(\frac{l2}{1}\right)^{\alpha} + \left(\frac{l3}{2}\right)^{\alpha} + \left(\frac{l4}{3}\right)^{\alpha} + \ldots$$

On a, dans ce cas,

$$u_m = \left[\frac{l(m+1)}{m}\right]^\alpha,$$

par conséquent,

$$m^{1+\varepsilon} u_m = \frac{[l(m+1)]^\alpha}{m^{\alpha-1-\varepsilon}} \quad \text{et} \quad m u_m = \frac{[l(m+1)]^\alpha}{m^{\alpha-1}};$$

or, supposons d'abord $\alpha > 1$, nous aurons

$$\frac{[l(m+1)]^\alpha}{m^{\alpha-1-\varepsilon}} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

ε étant pris suffisamment petit; la série est donc alors convergente.

Soit, en second lieu, $\alpha \leqq 1$, on aura

$$\frac{[l(m+1)]^\alpha}{m^{\alpha-1}} = \infty, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

la série est donc alors divergente. Ainsi, dans ce cas comme dans le précédent, la série est convergente ou divergente suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

Exemple IV. 1°. Soit la série

$$U = \frac{1}{p_1^\alpha} + \frac{1}{p_2^\alpha} + \frac{1}{p_3^\alpha} + \ldots,$$

les nombres $p_1, p_2, p_3, \ldots$ vérifiant, à partir d'une certaine limite, la relation

$$m = \frac{p_m}{A l p_m + B},$$

où A et B sont des constantes.

C'est ce qui a lieu très-probablement pour les nombres premiers [*].

On a, dans ce cas,

$$u_m = \frac{1}{p_m^\alpha},$$

[*] Legendre, *Théorie des nombres*, tome II, page 65.

par conséquent,

$$m^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m^{1+\varepsilon}}{p_m^\alpha} = \frac{1}{(A\, l p_m + B)^{1+\varepsilon} p_m^{\alpha-1-\varepsilon}}$$

et

$$m u_m = \frac{m}{p_m^\alpha} = \frac{1}{(A\, l p_m + B)\, p_m^{\alpha-1}};$$

Or, soit $\alpha > 1$, on aura

$$\frac{1}{(A l p_m + B)^{1+\varepsilon} p_m^{\alpha-1-\varepsilon}} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

ε étant pris suffisamment petit; la série est donc alors convergente.

Soit ensuite $\alpha < 1$, on aura

$$\frac{1}{(A l p_m + B)\, p_m^{\alpha-1}} = \infty, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

la série est donc alors divergente.

Si $\alpha = 1$, on aura

$$\frac{1}{(A\, l p_m + B)^{1+\varepsilon} p_m^{\alpha-1-\varepsilon}} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{(A l p_m + B)\, p_m^{\alpha-1}} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

il y a donc incertitude; mais on a alors

$$m(lm)^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m\,(lm)^{1+\varepsilon}}{p_m} = \frac{(l p_m - k)^{1+\varepsilon}}{A\, l p_m + B}$$

et

$$m l m\, u_m = \frac{m l m}{p_m} = \frac{l p_m - k}{A\, l p_m + B},$$

k étant un nombre infiniment petit par rapport à $l p_m$ quand $p_m = \infty$; or

$$\frac{l p_m - k}{A l p_m + B} = \frac{1}{A}, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

la série est donc encore divergente dans ce cas. Ainsi elle est convergente ou divergente, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

2°. Soit la série

$$U = \frac{1}{p_1(lp_1)^\alpha} + \frac{1}{p_2(lp_2)^\alpha} + \frac{1}{p_3(lp_3)^\alpha} + \ldots,$$

les nombres p_1, p_2, $p_3, \ldots$ étant les mêmes que dans la série précédente.

On a

$$u_m = \frac{1}{p_m(lp_m)^\alpha},$$

donc

$$m^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m^{1+\varepsilon}}{p_m(lp_m)^\alpha} = \frac{p_m^\varepsilon}{(Alp_m + B)^{1+\varepsilon}(lp_m)^\alpha}$$

et

$$mu_m = \frac{m}{p_m(lp_m)^\alpha} = \frac{1}{(Alp_m + B)(lp_m)^\alpha};$$

or

$$\frac{p_m^\varepsilon}{(Alp_m + B)^{1+\varepsilon}(lp_m)^\alpha} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{(Alp_m + B)(lp_m)^\alpha} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

il y a donc incertitude; mais

$$m(lm)^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m(lm)^{1+\varepsilon}}{p_m(lp_m)^\alpha} = \frac{(lp_m - k)^{1+\varepsilon}}{(Alp_m + B)(lp_m)^\alpha}$$

et

$$mlm\, u_m = \frac{mlm}{p_m(lp_m)^\alpha} = \frac{lp_m - k}{(Alp_m + B)(lp_m)^\alpha},$$

d'un autre côté, quelque soit α pourvu qu'il soit positif,

$$\frac{(lp_m - k)^{1+\varepsilon}}{(Alp_m + B)(lp_m)^\alpha} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

ε étant pris suffisamment petit; la série est donc toujours convergente.

3°. Soit la série

$$U = \frac{1}{p_1(llp_1)^\alpha} + \frac{1}{p_2(llp_2)^\alpha} + \frac{1}{p_3(llp_3)^\alpha} + \ldots,$$

$p_1, p_2, p_3, \ldots$ étant encore les mêmes nombres que précédemment.

On a

$$u_m = \frac{1}{p_m(llp_m)^\alpha},$$

donc,

$$m^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m^{1+\varepsilon}}{p_m(llp_m)^\alpha} = \frac{p^\varepsilon}{(Alp_m + B)^{1+\varepsilon}(llp_m)^\alpha}$$

et

$$mu_m = \frac{m}{p_m(llp_m)^\alpha} = \frac{1}{(Alp_m + B)(llp_m)};$$

or

$$\frac{p_m^\varepsilon}{(Alp_m + B)^{1+\varepsilon}(llp_m)} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{(Alp_m + B)(llp_m)^\alpha} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty :$$

il y a donc incertitude; mais

$$m(lm)^{1+\varepsilon} u_m = \frac{m(lm)^{1+\varepsilon}}{p_m(llp_m)^\alpha} = \frac{(lp_m - k)^{1+\varepsilon}}{(Alp_m + B)(llp_m)^\alpha}$$

et

$$mlmu_m = \frac{mlm}{p_m(llp_m)^\alpha} = \frac{lp_m - k}{(Alp_m + B)(llp_m)^\alpha},$$

or

$$\frac{(lp_m - k)^{1+\varepsilon}}{(Alp_m + B)(llp_m)^\alpha} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{lp_m - k}{(Alp_m + B)(llp_m)^\alpha} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

il y a donc encore incertitude; mais

$$mlm(llm)^{1+\varepsilon} u_m = \frac{mlm(llm)^{1+\varepsilon}}{p_m(llp_m)^\alpha} = \frac{(lp_m - k)(llp_m - k')^{1+\varepsilon}}{(Alp_m + B)(llp_m)^\alpha}$$

et

$$mlm\,llm\,u_m = \frac{mlm\,llm}{p_m(llp_m)^\alpha} = \frac{(lp_m - k)(llp_m - k')}{(Alp_m + B)(llp_m)^\alpha},$$

k' étant un nombre infiniment petit par rapport à llp_m quand $p_m = \infty$; or, si α est > 1,

$$\frac{(lp_m - k)(llp_m - k')^{1+\varepsilon}}{(Alp_m + B)(llp_m)^\alpha} = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

ε étant pris suffisamment petit; la série est donc alors convergente.

Si α est $\leqq 1$,

$$\frac{(lp_m - k)(llp_m - k')}{(\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B})(llp_m)^\alpha} = \infty \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\mathrm{A}}, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

la série est donc alors divergente. Ainsi la série proposée est convergente ou divergente, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

On verrait de même que les séries

$$\frac{1}{p_1 llp_1 (lllp_1)^\alpha} + \frac{1}{p_2 llp_2 (lllp_2)^\alpha} + \frac{1}{p_3 llp_3 (lllp_3)^\alpha} + \ldots,$$

$$\frac{1}{p_1 llp_1 lllp_1 (llllp_1)^\alpha} + \frac{1}{p_2 llp_2 lllp_2 (llllp_2)^\alpha} + \frac{1}{p_3 llp_3 lllp_3 (llllp_3)^\alpha} + \ldots,$$

. . . .

. . . .

où $p_1, p_2, p_3, \ldots$ représentent toujours des nombres qui, à partir d'une certaine limite, vérifient la condition

$$m = \frac{p_m}{\mathrm{A}lp_m + \mathrm{B}},$$

sont, toutes, convergentes ou divergentes, suivant que α est ou n'est pas plus grand que 1.

Il serait intéressant de vérifier par un procédé direct si les résultats que nous venons d'obtenir sont exacts lorsqu'on substitue les nombres premiers aux nombres représentés par $p_1, p_2, p_3, \ldots$; on pourrait, je crois, déduire de cette vérification une démonstration rigoureuse de la loi de Legendre.

IV.

Les règles précédentes sont d'une application très-simple : cependant quand les termes de la série contiennent un nombre indéfiniment croissant de facteurs, comme cela arrive, par exemple, dans la série

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\delta(\delta+1)}x^2 + \ldots\ldots,$$

on ne peut les appliquer qu'en prenant plusieurs précautions souvent embarrassantes : il vaut beaucoup mieux employer alors, soit les règles de M. de Morgan, soit les secondes règles de M. Bertrand. Je vais donner des démonstrations nouvelles de ces dernières règles.

V.

Règles de M. de Morgan.

Énoncé. Soit $u_m = \frac{1}{\varphi(m)}$ le terme général d'une série.

Considérez l'expression

$$p_0 = \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)},$$

où $\varphi'(m)$ représente la dérivée de $\varphi(m)$ par rapport à m, et déterminez la valeur

$$a_0$$

qu'elle prend quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_0 est plus grand que 1, et divergente si a_0 est plus petit que 1. Si $a_0 = 1$, considérez l'expression

$$p_1 = \left[\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1\right] lm = (p_0 - 1)\, lm,$$

et déterminez la valeur

$$a_1$$

qu'elle prend quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_1 est plus grand que 1, et divergente si a_1 est plus petit que 1. Si $a_1 = 1$, considérez l'expression

$$p_2 = (p_1 - 1)\, llm,$$

et déterminez la valeur

$$a_2$$

qu'elle prend quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_2 est plus grand que 1, et divergente si a_2 est plus petit que 1. Si $a_2 = 1$, considérez l'expression

$$p_3 = (p_2 - 1)\, lllm,$$

et continuez de la même manière.

Démonstration. Supposons, en premier lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,... soit plus grande que 1 : on aura alors, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} > k, \quad \left[\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1\right] lm > k, \quad \left\{\left[\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1\right] lm - 1\right\} llm > k, \ldots,$$

où k est un nombre plus grand que 1. Or on déduit successivement de ces inégalités,

$$\frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} > \frac{k}{m}, \quad \frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} > \frac{1}{m} + \frac{k}{mlm}, \quad \frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} > \frac{1}{m} + \frac{1}{mlm} + \frac{k}{mlm\, llm}, \ldots\ldots,$$

puis en multipliant par dm et intégrant de m à $m+1$,

$$l\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} > l\frac{(m+1)^k}{m^k}, \quad l\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} > l\frac{(m+1)[l(m+1)]^k}{m(lm)^k},$$
$$l\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} > l\frac{(m+1)\, l(m+1)[ll(m+1)]^k}{mlm(llm)^k}, \ldots\ldots,$$

d'où

$$\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} > \frac{(m+1)^k}{m^k}, \quad \frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} > \frac{(m+1)[l(m+1)]^k}{m(lm)^k},$$
$$\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} > \frac{(m+1)\, l(m+1)[ll(m+1)]^k}{mlm(llm)^k}, \ldots\ldots,$$

ou

$$\frac{\dfrac{1}{\varphi(m+1)}}{\dfrac{1}{\varphi(m)}} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)^k}}{\dfrac{1}{m^k}}, \quad \frac{\dfrac{1}{\varphi(m+1)}}{\dfrac{1}{\varphi(m)}} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)[l(m+1)]^k}}{\dfrac{1}{m(lm)^k}},$$
$$\frac{\dfrac{1}{\varphi(m+1)}}{\dfrac{1}{\varphi(m)}} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)\, l(m+1)[ll(m+1)]^k}}{\dfrac{1}{mlm(llm)^k}}, \ldots\ldots$$

Cela prouve (*lemmes* II et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est convergente.

Supposons, en second lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,... soit plus petite que 1 ; on aura alors, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} < k, \quad \left[\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1\right] lm < k, \quad \left\{\left[\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1\right] lm - 1\right\} llm < k, \ldots,$$

où k est un nombre plus petit que 1. Or on déduit successivement de ces inégalités,

$$\frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} < \frac{k}{m}, \quad \frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} < \frac{1}{m} + \frac{k}{m\,lm}, \quad \frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} < \frac{1}{m} + \frac{1}{mlm} + \frac{k}{mlm\,llm}, \ldots\ldots,$$

puis en multipliant par dm et intégrant de m à $m+1$,

$$l\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} < l\frac{(m+1)^k}{m^k}, \quad l\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} < l\frac{(m+1)[l(m+1)]^k}{m\,(lm)^k},$$

$$l\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} < l\frac{(m+1)\,l(m+1)\,[ll(m+1)]^k}{mlm\,(llm)^k}, \ldots\ldots,$$

d'où

$$\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} < \frac{(m+1)^k}{m^k}, \qquad \frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} < \frac{(m+1)[l(m+1)]^k}{m\,(lm)^k},$$

$$\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)} < \frac{(m+1)\,l(m+1)\,[ll(m+1)]^k}{mlm\,(llm)^k}, \ldots\ldots,$$

ou

$$\frac{\frac{1}{\varphi(m+1)}}{\frac{1}{\varphi(m)}} > \frac{\frac{1}{(m+1)^k}}{\frac{1}{m^k}}, \qquad \frac{\frac{1}{\varphi(m+1)}}{\frac{1}{\varphi(m)}} > \frac{\frac{1}{(m+1)[l(m+1)]^k}}{\frac{1}{m(lm)^k}},$$

$$\frac{\frac{1}{\varphi(m+1)}}{\frac{1}{\varphi(m)}} > \frac{\frac{1}{(m+1)\,l(m+1)\,[ll(m+1)]^k}}{\frac{1}{mlm\,(llm)^k}}, \ldots\ldots$$

Cela prouve (*lemmes* II et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est divergente.

VI.

Règles de M. Bertrand.

Énoncé. Soit u_m le terme général d'une série dans laquelle le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ est égal à l'unité pour $m = \infty$. Mettez ce rapport sous la forme

$$\frac{1}{1+r},$$

et calculez la valeur

$$a_0$$

que prend mr quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_0 est plus grand que 1, et divergente si a_0 est plus petit que 1. Si $a_0 = 1$, mettez le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ sous la forme

$$\frac{1}{1+\frac{1}{m}+r'},$$

et calculez la valeur

$$a_1$$

que prend $mlmr'$ quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_1 est plus grand que 1, et divergente si a_1 est plus petit que 1. Si $a_1 = 1$, mettez le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ sous la forme

$$\frac{1}{1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+r''},$$

et calculez la valeur

$$a_2$$

que prend $mlm\,llm\,r''$ quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_2 est plus grand que 1, et divergente si a_2 est plus petit que 1. Si $a_2 = 1$, mettez le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ sous la forme

$$\frac{1}{1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+\frac{1}{mlm\,llm}+r'''},$$

et continuez de la même manière.

Démonstration. Commençons par transformer les rapports

$$\frac{m+1}{m},\quad \frac{l(m+1)}{lm},\quad \frac{ll(m+1)}{llm},\ldots.$$

1°. $\frac{m+1}{m}=1+\frac{1}{m}.$

2°. Soit

$$\frac{l(m+1)}{lm}=x,\quad \text{d'où}\quad l(m+1)=xlm,\quad \text{d'où}\quad m+1=m^x;$$

x sera plus grand que l'unité ; posant

$$x=1+\frac{1}{y},$$

il viendra

$$m+1=m^{1+\frac{1}{y}},\quad \text{d'où}\quad \left(\frac{m+1}{m}\right)^y=\left(1+\frac{1}{m}\right)^y=m,$$

d'où

$$yl\left(1+\frac{1}{m}\right)=lm\quad \text{ou}\quad y\left(\frac{1}{m}+\frac{\varepsilon}{m^2}\right)=lm,$$

ε étant un nombre fini quelque grand que soit m ; de là on tire

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{mlm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

et par conséquent

$$\frac{l(m+1)}{lm}=x=1+\frac{1}{y}=1+\frac{1}{mlm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

ω ne devenant pas nul pour $m=\infty$.

3°. Soit

$$\frac{ll(m+1)}{llm} = x, \quad \text{d'où} \quad ll(m+1) = x\,llm, \quad \text{d'où} \quad l(m+1) = (lm)^x;$$

x sera plus grand que l'unité; posant

$$x = 1 + \frac{1}{y},$$

il viendra

$$l(m+1) = (lm)^{1+\frac{1}{y}}, \quad \text{d'où} \quad \left[\frac{l(m+1)}{lm}\right]^y = \left(1 + \frac{1}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2}\right)^y = lm,$$

d'où

$$yl\left(1 + \frac{1}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2}\right) = llm,$$

ou

$$y\left[\frac{1}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2} + \varepsilon\left(\frac{1}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2}\right)^2\right] = llm,$$

ε étant un nombre fini quelque grand que soit m; de là on tire

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{mlmllm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

et par conséquent

$$\frac{ll(m+1)}{llm} = x = 1 + \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{mlm\,llm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

ω ne devenant pas nul pour $m = \infty$.

4°. Soit

$$\frac{lll(m+1)}{lllm} = x, \quad \text{d'où} \quad lll(m+1) = x\,lllm, \quad \text{d'où} \quad ll(m+1) = (llm)^x;$$

x sera plus grand que 1; posant

$$x = 1 + \frac{1}{y},$$

il viendra

$$ll(m+1) = (llm)^{1+\frac{1}{y}}, \quad \text{d'où} \quad \left[\frac{ll(m+1)}{llm}\right]^y = \left(1 + \frac{1}{mlm\,llm} + \frac{1}{\omega m^2}\right)^y = llm,$$

d'où

$$yl\left(1+\frac{1}{mlmllm}+\frac{1}{\omega m^2}\right)=lllm,$$

ou

$$y\left[\frac{1}{mlmllm}+\frac{1}{\omega m^2}+\varepsilon\left(\frac{1}{mlmllm}+\frac{1}{\omega m^2}\right)^2\right]=lllm,$$

ε étant un nombre fini quelque grand que soit m; de là on tire

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{mlm\,llmlllm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

et par conséquent

$$\frac{lll(m+1)}{lllm}=x=1+\frac{1}{y}=1+\frac{1}{mlmllmlllm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

ω ne devenant pas nul pour $m=\infty$.

On continuerait de la même manière.

Des résultats que nous venons d'obtenir on déduit sans peine,

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^k=1+\frac{k}{m}+\frac{1}{\omega m^2},\qquad \left[\frac{l(m+1)}{lm}\right]^k=1+\frac{k}{mlm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

$$\left[\frac{ll(m+1)}{llm}\right]^k=1+\frac{k}{mlm\,llm}+\frac{1}{\omega m^2},\qquad \left[\frac{lll(m+1)}{lllm}\right]^k=1+\frac{k}{mlmllmlllm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

. . . .

k étant un nombre positif quelconque et ω représentant un nombre qui ne devient pas nul pour $m=\infty$.

Par suite, on a

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^k=1+\frac{k}{m}+\frac{1}{\omega m^2},\qquad \frac{m+1}{m}\left[\frac{l(m+1)}{lm}\right]^k=1+\frac{1}{m}+\frac{k}{mlm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

$$\frac{m+1}{m}\,\frac{l(m+1)}{lm}\left[\frac{ll(m+1)}{llm}\right]^k=1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+\frac{k}{mlm\,llm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

$$\frac{m+1}{m}\,\frac{l(m+1)}{lm}\,\frac{ll(m+1)}{llm}\left[\frac{lll(m+1)}{lllm}\right]^k=1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+\frac{1}{mlmllm}$$
$$+\frac{k}{mlm\,llmlllm}+\frac{1}{\omega m^2},$$

. . . .

ω étant encore un nombre qui ne devient pas nul pour $m=\infty$.

Revenons maintenant à la démonstration des règles.

Supposons, en premier lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,..., soit plus grande que 1; je dis que l'on aura, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} 1+r>\left(\frac{m+1}{m}\right)^k, \quad 1+\frac{1}{m}+r'>\frac{m+1}{m}\left[\frac{l(m+1)}{lm}\right]^k, \\ 1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+r''>\frac{m+1}{m}\,\frac{l(m+1)}{lm}\left[\frac{ll(m+1)}{llm}\right]^k,\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

où k est un nombre plus grand que 1.

En effet, substituant aux seconds membres leurs valeurs obtenues ci-dessus, ces inégalités deviennent

$$r>\frac{k}{m}+\frac{1}{\omega m^2}, \qquad r'>\frac{k}{mlm}+\frac{1}{\omega m^2}, \qquad r''>\frac{k}{mlmllm}+\frac{1}{\omega m^2},\ldots\ldots,$$

d'où

$$mr>k+\frac{1}{\omega m}, \quad mlmr'>k+\frac{lm}{\omega m}, \quad mlmllmr''>k+\frac{lmllm}{\omega m},\ldots\ldots$$

Si l'on fait croître m jusqu'à l'infini, les premiers membres des dernières inégalités convergent respectivement vers a_0, a_1, a_2,..., tandis que les seconds membres ont tous pour limite k; or k étant assujetti à la seule condition d'être plus grand que 1, peut, en outre, être supposé plus petit qu'une des limites a_0, a_1, a_2,..., si, comme nous le supposons, parmi ces limites il y en a une plus grande que 1; cela étant, une des dernières égalités ne peut pas manquer d'avoir lieu, à partir d'une certaine valeur de m; donc aussi, une des inégalités (1) aura lieu pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini.

On déduit maintenant des inégalités (1),

$$\frac{1}{1+r}<\frac{m^k}{(m+1)^k}, \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{m}+r'}<\frac{m(lm)^k}{(m+1)[l(m+1)]^k},$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+r''}<\frac{mlm\,(llm)^k}{(m+1)\,l(m+1)\,[ll(m+1)]^k},\ldots\ldots$$

ou

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)^k}}{\dfrac{1}{m^k}}, \quad \frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)[l(m+1)]^k}}{\dfrac{1}{m(lm)^k}},$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)\,l(m+1)[ll(m+1)]^k}}{\dfrac{1}{mlm(llm)^k}}, \ldots\ldots\ldots$$

Cela prouve (*lemmes* II et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est convergente.

Supposons, en second lieu, qu'une des limites a_0, a_1, $a_2, \ldots$, soit plus petite que 1; je dis que l'on aura, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$(2) \quad \begin{cases} 1 + r < \left(\dfrac{m+1}{m}\right)^k, \quad 1 + \dfrac{1}{m} + r' < \dfrac{m+1}{m}\left[\dfrac{l(m+1)}{lm}\right]^k, \\ 1 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{mlm} + r'' < \dfrac{m+1}{m}\,\dfrac{l(m+1)}{lm}\left[\dfrac{ll(m+1)}{llm}\right]^k, \ldots\ldots, \end{cases}$$

où k est un nombre plus petit que 1.

En effet, substituant aux seconds membres leurs valeurs obtenues ci-dessus, ces inégalités deviennent

$$r < \frac{k}{m} + \frac{1}{\omega m^2}, \qquad r' < \frac{k}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2}, \qquad r'' < \frac{k}{mlm\,llm} + \frac{1}{\omega m^2} \ldots\ldots,$$

d'où

$$mr < k + \frac{1}{\omega m}, \quad mlmr' < k + \frac{lm}{\omega m}, \quad mlmllmr'' < k + \frac{lmllm}{\omega m}, \ldots\ldots$$

Si l'on fait croître m jusqu'à l'infini, les premiers membres des dernières inégalités convergent respectivement vers a_0, a_1, $a_2, \ldots$, tandis que les seconds membres ont tous pour limite k; or k étant assujetti à la seule condition d'être plus petit que 1, peut, en outre, être supposé plus grand qu'une des limites a_0, a_1, $a_2, \ldots$, si, comme nous l'avons supposé, parmi ces limites il y en a une plus petite que 1; cela étant, une des dernières inégalités ne peut pas manquer d'avoir lieu à partir d'une certaine valeur de m, donc aussi une des inégalités (2) aura lieu pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini.

On déduit maintenant des inégalités (2),

$$\frac{1}{1+r} > \frac{m^k}{(m+1)^k}, \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{m}+r'} > \frac{m(lm)^k}{(m+1)[l(m+1)]^k},$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{m}+\frac{1}{mlm}+r''} > \frac{mlm(llm)^k}{(m+1)l(m+1)[ll(m+1)]^k}, \ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} > \frac{\frac{1}{(m+1)^k}}{\frac{1}{m^k}}, \qquad \frac{u_{m+1}}{u_m} > \frac{\frac{1}{(m+1)[l(m+1)]^k}}{\frac{1}{m(lm)^k}},$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} > \frac{\frac{1}{(m+1)l(m+1)[ll(m+1)]^k}}{\frac{1}{mlm(llm)^k}}, \ldots\ldots$$

Cela prouve (*lemmes* II et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est divergente.

VII.

On pourrait substituer aux règles de M. Bertrand les règles suivantes, qui ont avec elles une grande analogie, mais qui sont peut-être un peu plus simples.

Énoncé. Soit u_m le terme général d'une série dans laquelle le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ est égal à l'unité pour $m = \infty$. Mettez ce rapport sous la forme

$$1 - r,$$

et calculez la valeur

$$a_0$$

que prend mr quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_0 est plus grand que 1, et divergente si a_0 est plus petit que 1. Si $a_0 = 1$, mettez le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ sous la forme

$$1 - \frac{1}{m} - r',$$

et calculez la valeur

$$a_1$$

que prend $mlmr'$ quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_1 est plus grand que 1, et divergente si a_1 est plus petit que 1. Si $a_1 = 1$, mettez le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ sous la forme

$$1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{mlm} - r'',$$

et calculez la valeur

$$a_2$$

que prend $mlmllmr''$ quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_2 est plus grand que 1, et divergente si a_2 est plus petit que 1. Si $a_2 = 1$, mettez le rapport $\frac{u_{m+1}}{u_m}$ sous la forme

$$1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{mlm} - \frac{1}{mlm\,llm} - r''',$$

et continuez de la même manière [*].

Démonstration. Nous avons vu, dans la démonstration des règles précédentes, que

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^k = 1 + \frac{k}{m} + \frac{1}{\omega m^2}, \qquad \left[\frac{l(m+1)}{lm}\right]^k = 1 + \frac{k}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

$$\left[\frac{ll(m+1)}{llm}\right]^k = 1 + \frac{k}{mlmllm} + \frac{1}{\omega m^2}, \qquad \left[\frac{lll(m+1)}{lllm}\right]^k = 1 + \frac{k}{mlmllmlllm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et que

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^k = 1 + \frac{k}{m} + \frac{1}{\omega m^2}, \quad \frac{m+1}{m}\left[\frac{l(m+1)}{lm}\right]^k = 1 + \frac{1}{m} + \frac{k}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

$$\frac{m+1}{m}\,\frac{l(m+1)}{lm}\left[\frac{ll(m+1)}{llm}\right]^k = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{mlm} + \frac{k}{mlmllm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

$$\frac{m+1}{m}\,\frac{l(m+1)}{lm}\,\frac{ll(m+1)}{llm}\left[\frac{lll(m+1)}{lllm}\right]^k = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{mlm} + \frac{1}{mlmllm} + \frac{k}{mlmllmlllm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

[*] On pourrait établir ces règles d'une manière assez simple en prouvant que les limites que l'on vient d'appeler a_0, a_1, a_2,... sont égales à celles qu'on a désignées de la même manière dans les règles de M. Bertrand; mais nous préférons donner une démonstration directe.

ω représentant un nombre qui ne devient pas nul pour $m = \infty$. k était supposé positif, mais il est clair que rien n'empêche de le prendre négatif; mettons donc $-k$ en place de k en explicitant le signe, cela nous donnera

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^k = 1 - \frac{k}{m} + \frac{1}{\omega m^2}, \qquad \left[\frac{lm}{l(m+1)}\right]^k = 1 - \frac{k}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

$$\left[\frac{llm}{ll(m+1)}\right]^k = 1 - \frac{k}{mlmllm} + \frac{1}{\omega m^2}, \quad \left[\frac{lllm}{lll(m+1)}\right]^k = 1 - \frac{k}{mlmllmlllm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

. . . .

et

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^k = 1 - \frac{k}{m} + \frac{1}{\omega m^2}, \quad \frac{m}{m+1}\left[\frac{lm}{l(m+1)}\right]^k = 1 - \frac{1}{m} - \frac{k}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

$$\frac{m}{m+1}\,\frac{lm}{l(m+1)}\left[\frac{llm}{ll(m+1)}\right]^k = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{mlm} - \frac{k}{mlmllm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

$$\frac{m}{m+1}\,\frac{lm}{l(m+1)}\,\frac{llm}{ll(m+1)}\left[\frac{lllm}{lll(m+1)}\right]^k = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{mlm} - \frac{1}{mlmllm} - \frac{k}{mlmllmlllm} + \frac{1}{\omega m^2},$$

. . . .

ω représentant toujours un nombre qui ne devient pas nul pour $m = \infty$.

Cela posé, supposons, en premier lieu, qu'une des limites a_0, a_1, $a_2, \ldots$, soit plus grande que 1; je dis que l'on aura, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$(1)\quad \begin{cases} 1 - r < \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^k, \quad 1 - \dfrac{1}{m} - r' < \dfrac{m}{m+1}\left[\dfrac{lm}{l(m+1)}\right]^k, \\ 1 - \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{mlm} - r'' < \dfrac{m}{m+1}\,\dfrac{lm}{l(m+1)}\left[\dfrac{llm}{ll(m+1)}\right]^k, \ldots\ldots, \end{cases}$$

où k est un nombre plus grand que 1.

En effet, substituant aux seconds membres leurs valeurs obtenues ci-dessus, ces inégalités deviennent

$$-r < -\frac{k}{m} + \frac{1}{\omega m^2}, \quad -r' < -\frac{k}{mlm} + \frac{1}{\omega m^2}, \quad -r'' < -\frac{k}{mlmllm} + \frac{1}{\omega m^2}, \ldots\ldots,$$

d'où

$$mr > k - \frac{1}{\omega m}, \quad mlmr' > k - \frac{lm}{\omega m}, \quad mlmllmr'' > k - \frac{lm\,llm}{\omega m}, \ldots\ldots$$

Si l'on fait croître m jusqu'à l'infini, les premiers membres des dernières inégalités convergent respectivement vers a_0, a_1, $a_2, \ldots$, tandis que les seconds membres ont tous pour limite k; or k étant assujetti à la seule condition d'être plus grand que 1, peut, en outre, être supposé plus petit qu'une des limites a_0, a_1, $a_2, \ldots$, si, comme nous le supposons, parmi ces limites, il en est une plus grande que 1; cela étant, une des dernières inégalités ne peut pas manquer d'avoir lieu, à partir d'une certaine valeur de m, donc aussi, une des inégalités (1) a lieu, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini.

On déduit, maintenant, des inégalités (1),

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)^k}}{\dfrac{1}{m^k}}, \quad \frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)[l(m+1)]^k}}{\dfrac{1}{m(lm)^k}},$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} < \frac{\dfrac{1}{(m+1)l(m+1)[ll(m+1)]^k}}{\dfrac{1}{mlm(llm)^k}}, \ldots\ldots\ldots$$

Cela prouve (*lemmes* II et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est convergente.

Supposons, en second lieu, qu'une des limites a_0, a_1, $a_2, \ldots$, soit plus petite que 1; je dis que l'on aura, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &1 - r > \left(\frac{m}{m+1}\right)^k, \quad 1 - \frac{1}{m} - r' > \frac{m}{m+1}\left[\frac{lm}{l(m+1)}\right]^k, \\ &1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{mlm} - r'' > \frac{1}{m+1}\,\frac{lm}{l(m+1)}\left[\frac{llm}{ll(m+1)}\right]^k, \ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

où k est un nombre plus petit que 1.

En effet, substituant aux seconds membres leurs valeurs obtenues ci-dessus, ces inégalités deviennent

$$-r > -\frac{k}{m}+\frac{1}{\omega m^2},\quad -r' > -\frac{k}{mlm}+\frac{1}{\omega m^2},\quad -r'' > -\frac{k}{mlmllm}+\frac{1}{\omega m^2},\ldots\ldots,$$

d'où

$$mr < k - \frac{1}{\omega m},\qquad mlmr' < k - \frac{lm}{\omega m},\quad mlmllmr'' < k - \frac{lm\,llm}{\omega m},\ldots\ldots$$

Si l'on fait croître m jusqu'à l'infini, les premiers membres des dernières inégalités convergent respectivement vers a_0, a_1, a_2,..., tandis que les seconds membres ont tous pour limite k; or k étant assujetti à la seule condition d'être plus petit que 1, peut, en outre, être supposé plus grand qu'une des limites a_0, a_1, a_2,..., si, comme nous le supposons, parmi ces limites il y en a une plus petite que 1; cela étant, une des dernières inégalités ne peut pas manquer d'avoir lieu, à partir d'une certaine valeur de m, donc aussi, une des inégalités (2) a lieu, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini.

On déduit maintenant des inégalités (2),

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} > \frac{\frac{1}{(m+1)^k}}{\frac{1}{m^k}},\qquad \frac{u_{m+1}}{u_m} > \frac{\frac{1}{(m+1)[l(m+1)]^k}}{\frac{1}{m(lm)^k}},$$

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} > \frac{\frac{1}{(m+1)l(m+1)[ll(m+1)]^k}}{\frac{1}{mlm(llm)^k}},\ldots\ldots$$

Cela prouve (*lemmes* II et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est divergente.

VIII.

On peut enfin joindre aux règles précédentes une série d'autres règles analogues, mais de forme différente, et qui peuvent être préférables dans plusieurs cas.

Enoncé. Soit u_m le terme général d'une série dans laquelle la racine

13..

$\sqrt[m]{u_m}$ est égale à l'unité quand $m = \infty$. Mettez cette racine sous la forme

$$1 - r,$$

et calculez la valeur

$$a_0$$

que prend $\frac{mr}{lm}$ quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_0 est plus grand que 1, et divergente si a_0 est plus petit que 1. Si $a_0 = 1$, mettez la racine $\sqrt[m]{u_m}$ sous la forme

$$1 - \frac{lm}{m} - r',$$

et calculez la valeur

$$a_1$$

que prend $\frac{mr'}{llm}$ quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_1 est plus grand que 1, et divergente si a_1 est plus petit que 1. Si $a_1 = 1$, mettez la racine $\sqrt[m]{u_m}$ sous la forme

$$1 - \frac{lm}{m} - \frac{llm}{m} - r'',$$

et calculez la valeur

$$a_2$$

que prend $\frac{mr''}{lllm}$ quand $m = \infty$; la série sera convergente si a_2 est plus grand que 1, et divergente si a_2 est plus petit que 1. Si $a_2 = 1$, mettez la racine $\sqrt[m]{u_m}$ sous la forme

$$1 - \frac{lm}{m} - \frac{llm}{m} - \frac{lllm}{m} - r''',$$

et continuez de la même manière.

Démonstration. Commençons par transformer les racines

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m}}, \quad \sqrt[m]{\frac{1}{lm}}, \quad \sqrt[m]{\frac{1}{llm}}, \ldots,$$

1°. Soit

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m}} = x, \quad \text{d'où} \quad x^m = \frac{1}{m};$$

x sera plus petit que 1; posant

$$x = 1 - y,$$

il viendra

$$(1-y)^m = \frac{1}{m}, \quad \text{d'où} \quad ml(1-y) = -lm, \quad \text{d'où} \quad l(1-y) = -\frac{lm}{m},$$

ou

$$y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \ldots = y + \varepsilon y^2 = \frac{lm}{m},$$

ε étant un nombre fini quelque grand que soit m; de là on tire

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\varepsilon \frac{lm}{m}}}{2\varepsilon} = \frac{-1 \pm \left[1 + 2\varepsilon \frac{lm}{m} + \omega \left(\frac{lm}{m}\right)^2\right]}{2\varepsilon},$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m; on ne doit évidemment prendre que le signe supérieur, car on a

$$y = 0 \quad \text{pour } m = \infty;$$

on a donc

$$y = \frac{lm}{m} + \omega \left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$

et par conséquent

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m}} = x = 1 - y = 1 - \frac{lm}{m} + \omega \left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m.

2°. Soit

$$\sqrt[m]{\frac{1}{lm}} = x, \quad \text{d'où} \quad x^m = \frac{1}{lm};$$

x sera plus petit que 1; posant

$$x = 1 - y,$$

il viendra

$$(1-y)^m = \frac{1}{lm}, \quad \text{d'où} \quad ml(1-y) = -llm, \quad \text{d'où} \quad l(1-y) = -\frac{llm}{m},$$

ou

$$y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \ldots = y + \varepsilon y^2 = \frac{llm}{m},$$

ε étant un nombre fini quelque grand que soit m; de là on tire

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\varepsilon \frac{llm}{m}}}{2\varepsilon} = \frac{-1 \pm \left[1 + 2\varepsilon \frac{llm}{m} + \omega \left(\frac{llm}{m}\right)^2\right]}{2\varepsilon},$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m; on ne doit prendre évidemment que le signe supérieur, car on a

$$y = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

on a donc

$$y = \frac{llm}{m} + \omega \left(\frac{llm}{m}\right)^2,$$

et par conséquent

$$\sqrt[m]{\frac{1}{lm}} = x = 1 - y = 1 - \frac{llm}{m} + \omega \left(\frac{llm}{m}\right)^2,$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m.

3°. Soit

$$\sqrt[m]{\frac{1}{llm}} = x, \qquad \text{d'où} \quad x^m = \frac{1}{llm};$$

x sera plus petit que 1; posant

$$x = 1 - y,$$

il viendra

$$(1-y)^m = \frac{1}{llm}, \quad \text{d'où} \quad ml(1-y) = -lllm, \quad \text{d'où} \quad l(1-y) = -\frac{lllm}{m},$$

ou

$$y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \ldots = y + \varepsilon y^2 = \frac{lllm}{m},$$

ε étant un nombre fini quelque grand que soit m; de là on tire

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\varepsilon \frac{llm}{m}}}{2\varepsilon} = \frac{-1 \pm \left[1 + 2\varepsilon \frac{llm}{m} + \omega \left(\frac{llm}{m}\right)^2\right]}{2\varepsilon},$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m; on ne doit prendre évidemment que le signe supérieur, car on doit avoir

$$y = 0, \quad \text{pour} \quad m = \infty;$$

on a donc

$$y = \frac{llm}{m} + \omega \left(\frac{llm}{m}\right)^2,$$

et par conséquent

$$\sqrt[m]{\frac{1}{llm}} = x = 1 - y = 1 - \frac{llm}{m} + \omega \left(\frac{llm}{m}\right)^2.$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m.

4°. On trouverait de la même manière

$$\sqrt[m]{\frac{1}{lllm}} = 1 - \frac{lllm}{m} + \omega \left(\frac{lllm}{m}\right)^2,$$

ω étant un nombre fini quelque grand que soit m, et ainsi de suite.

Des résultats que nous venons d'obtenir on déduit sans peine

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m^k}} = 1 - k\frac{lm}{m} + \omega \left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$

$$\sqrt[m]{\frac{1}{(lm)^k}} = 1 - k\frac{llm}{m} + \omega \left(\frac{llm}{m}\right)^2,$$

$$\sqrt[m]{\frac{1}{(llm)^k}} = 1 - k\frac{lllm}{m} + \omega \left(\frac{lllm}{m}\right)^2,$$

$$\sqrt[m]{\frac{1}{(lllm)^k}} = 1 - k\frac{llllm}{m} + \omega \left(\frac{llllm}{m}\right)^2,$$

. . . .

k étant un nombre positif quelconque et ω représentant un nombre fini quelque grand que soit m.

Par suite, on a

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m^k}} = 1 - k\frac{lm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$

$$\sqrt[m]{\frac{1}{m(lm)^k}} = 1 - \frac{lm}{m} - k\frac{llm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$

$$\sqrt[m]{\frac{1}{mlm(llm)^k}} = 1 - \frac{lm}{m} - \frac{llm}{m} - k\frac{lllm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ω étant encore un nombre fini quelque grand que soit m.

Revenons maintenant à la démonstration des règles.

Supposons, en premier lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,... soit plus grande que 1; je dis que l'on aura, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$(1)\quad \begin{cases} 1 - r < \sqrt[m]{\dfrac{1}{m^k}}, \quad 1 - \dfrac{lm}{m} - r' < \sqrt[m]{\dfrac{1}{m(lm)^k}}, \\ 1 - \dfrac{lm}{m} - \dfrac{llm}{m} - r'' < \sqrt[m]{\dfrac{1}{mlm(llm)^k}}, \ldots\ldots \end{cases}$$

où k est un nombre plus grand que 1.

En effet, substituant aux seconds membres leurs valeurs obtenues précédemment, ces inégalités deviennent

$$-r < -k\frac{lm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2, \quad -r' < -k\frac{llm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$

$$-r'' < -k\frac{lllm}{m} + \omega\left(\frac{llm}{m}\right)^2, \ldots,$$

d'où

$$\frac{mr}{lm} > k - \omega\frac{lm}{m}, \quad \frac{mr'}{llm} > k - \omega\frac{(lm)^2}{m\,llm}, \quad \frac{mr''}{lllm} > k - \omega\frac{(lm)^2}{mlllm}, \ldots\ldots$$

Si l'on fait croître m jusqu'à l'infini, les premiers membres des dernières inégalités convergent respectivement vers a_0, a_1, a_2,..., tandis que les seconds membres ont tous pour limite k; or k étant assujetti à la seule condition d'être plus grand que 1, peut, en outre, être supposé plus petit qu'une des limites a_0, a_1, a_2,..., si, comme nous le supposons, parmi ces limites il y en a une plus grande que 1 ; cela étant, une des dernières inégalités ne peut pas manquer d'avoir lieu à partir d'une certaine valeur de m, donc aussi, une des inégalités (1) a lieu pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini.

On déduit maintenant des inégalités (1),

$$u_m < \frac{1}{m^k}, \quad u_m < \frac{1}{m(lm)^k}, \quad u_m < \frac{1}{mlm(llm)^k}, \ldots$$

Cela prouve (*lemmes* I et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est convergente.

Supposons, en second lieu, qu'une des limites a_0, a_1, a_2,..., soit plus petite que 1; je dis que l'on aura, pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini, une des inégalités

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - r > \sqrt[m]{\dfrac{1}{m^k}}, \quad 1 - \dfrac{lm}{m} - r' > \sqrt[m]{\dfrac{1}{m(lm)^k}}, \\ 1 - \dfrac{lm}{m} - \dfrac{llm}{m} - r'' > \sqrt[m]{\dfrac{1}{mlm(llm)^k}}, \ldots\ldots, \end{array} \right.$$

où k est un nombre plus petit que 1.

En effet, substituant aux seconds membres leurs valeurs obtenues ci-dessus, ces inégalités deviennent

$$-r > -k\frac{lm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2, \quad -r' > -k\frac{llm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2,$$
$$-r'' > -k\frac{lllm}{m} + \omega\left(\frac{lm}{m}\right)^2, \ldots\ldots,$$

d'où

$$\frac{mr}{lm} < k - \omega\frac{lm}{m}, \quad \frac{mr'}{llm} < k - \omega\frac{(lm)^2}{mllm}, \quad \frac{mr''}{lllm} < k - \omega\frac{(lm)^2}{mlllm}, \ldots$$

Si l'on fait croître m jusqu'à l'infini, les premiers membres des dernières inégalités convergent respectivement vers a_0, a_1, a_2,..., tandis que les seconds membres ont tous pour limite k ; or k étant assujetti à la seule condition d'être plus petit que 1, peut, en outre, être supposé plus grand qu'une des limites a_0, a_1, a_2,..., si, comme nous le supposons, parmi ces limites il y en a une plus petite que 1 ; cela étant, une des dernières inégalités ne peut pas manquer d'avoir lieu à partir d'une certaine valeur de m, donc aussi, une des inégalités (2) aura lieu pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre fini.

On déduit maintenant des inégalités (2),

$$u_m > \frac{1}{m^k}, \quad u_m > \frac{1}{m(lm)^k}, \quad u_m > \frac{1}{mlm(llm)^k}, \ldots$$

Cela prouve (*lemmes* I et III) que, dans chacun des cas supposés, la série est divergente.

IX.

Les règles de M. de Morgan, celles de M. Bertrand, ou bien enfin celles que nous venons de démontrer en dernier lieu, suffiront, dans la plupart des cas, pour décider la convergence ou la divergence des séries. Il faut pourtant remarquer que toutes ces règles seront en défaut lorsque que les limites que nous avons représentées par a_0, a_1, a_2,..., n'ayant pas de valeur déterminée, seront tantôt plus grandes et tantôt plus petites que 1. Dans ce cas, on lèvera quelquefois la difficulté en groupant deux à deux, ou trois à trois, ou quatre à quatre, etc., les termes de la série, et considérant les groupes obtenus comme les termes de nouvelles séries auxquelles on appliquera les règles. On pourra opérer de la même manière pour les séries à termes tantôt positifs et tantôt négatifs, car les groupes formés pourront tous avoir le même signe, et alors les règles exposées suffiront pour reconnaître la convergence ou la divergence. Du reste, nous nous proposons de revenir en détail sur tous ces cas dans une autre occasion.

X.

Nous terminerons en donnant des règles pour reconnaître si une intégrale définie est finie ou infinie, lorsqu'une des limites rend infinie la fonction sous le signe $\int$.

Soit l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

et admettons que

$$f(b) = \infty \text{ [*]}.$$

Pour déterminer si cette intégrale est finie ou infinie:

Règle. Considérez les deux expressions

$$(b-x)^{1-\delta} f(x), \quad (b-x) f(x),$$

où δ représente un nombre positif aussi petit qu'on veut mais différent de zéro, et calculez les valeurs

$$a_0, \quad a'_0,$$

qu'elles prennent pour $x = b$; l'intégrale sera finie si a_0 n'est pas infini, et infinie si a'_0 n'est pas zéro. Si a_0 est infini et que a'_0 soit zéro, considérez les deux expressions

$$(b-x)\left(l\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta} f(x), \quad (b-x)\, l\frac{1}{b-x}\, f(x),$$

où δ est un nombre positif aussi petit qu'on veut mais différent de zéro, et calculez les valeurs

$$a_1, \quad a'_1,$$

qu'elles prennent quand $x = b$; l'intégrale sera finie si a_1 n'est pas infini, et infinie si a'_1 n'est pas zéro. Si a_1 est infini et que a'_1 soit zéro, considérez les deux expressions

$$(b-x)\, l\frac{1}{b-x}\left(ll\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta} f(x), \quad (b-x)\, l\frac{1}{b-x}\, ll\frac{1}{b-x}\, f(x),$$

où δ est un nombre positif aussi petit qu'on veut mais différent de

[*] Nous supposons, en outre, que $f(x)$ garde le même signe pour toutes les valeurs de x qui avoisinent b. Si cela n'était pas, on profiterait de la remarque qui a été faite dans le paragraphe précédent.

zéro, et calculez les valeurs

$$a_2, \quad a'_2,$$

qu'elles prennent quand $x = b$; l'intégrale sera finie si a_2 n'est pas infini, et infinie si a'_2 n'est pas zéro. Si a_2 est infini et que a'_2 soit zéro, considérez les deux expressions

$$(b-x)\, l\frac{1}{b-x}\, ll\frac{1}{b-x}\left(lll\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta} f(x),$$

$$(b-x)\, l\frac{1}{b-x}\, ll\frac{1}{b-x}\, lll\frac{1}{b-x} f(x),$$

et continuez de la même manière [*].

Démonstration. Supposons, en premier lieu, qu'une des limites a_0, a_1, $a_2, \ldots$, soit différente de l'infini; on aura alors depuis une valeur de x, $\beta < b$, jusqu'à b, une des inégalités

$$(b-x)^{1-\delta} f(x) < k, \quad (b-x)\left(l\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta} f(x) < k,$$

$$(b-x)\, l\frac{1}{b-x}\left(ll\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta} f(x) < k, \ldots,$$

où k est un nombre déterminé et fini. Or on déduit successivement de ces inégalités,

$$f(x) < \frac{k}{(b-x)^{1-\delta}}, \quad f(x) < \frac{k}{(b-x)\left(l\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta}},$$

$$f(x) < \frac{k}{(b-x)\, l\frac{1}{b-x}\left(ll\frac{1}{b-x}\right)^{1+\delta}}, \ldots\ldots,$$

d'où

$$\int_\beta^b f(x)\,dx < \frac{k}{\delta}(b-\beta)^\delta, \quad \int_\beta^b f(x)\,dx < \frac{k}{\delta}\frac{1}{\left(l\frac{1}{b-\beta}\right)^\delta},$$

$$\int_\beta^b f(x)\,dx < \frac{k}{\delta}\frac{1}{\left(ll\frac{1}{b-\beta}\right)^\delta}, \ldots\ldots$$

Cela prouve que, dans chacun des cas supposés, l'intégrale est finie.

---

[*] En changeant $b-x$ en $x-a$, on obtient les règles qu'il faut employer dans le cas où, au lieu de $f(b) = \infty$, on a $f(a) = \infty$.

Supposons, en second lieu, qu'une des limites a'_0, a'_1, a'_2,..., soit différente de zéro; on aura alors depuis une valeur de x, $\beta < b$, jusqu'à b, une des inégalités,

$$(b-x)f(x) > k, \quad (b-x)\,l\frac{1}{b-x}f(x) > k, \quad (b-x)\,l\frac{1}{b-x} > k, \ldots..,$$

où k est un nombre fini et différent de zéro. Or on déduit successivement de ces inégalités,

$$f(x) > \frac{k}{b-x}, \quad f(x) > \frac{k}{(b-x)\,l\frac{1}{b-x}}, \quad f(x) > \frac{k}{(b-x)\,l\frac{1}{b-x}\,ll\frac{1}{b-x}}, \ldots.,$$

d'où

$$\int_\beta^b f(x)\,dx > \infty, \quad \int_\beta^b f(x)\,dx > \infty, \quad \int_\beta^b f(x)\,dx > \infty, \ldots...$$

Cela prouve que, dans chacun des cas supposés, l'intégrale est infinie.

XI.

On trouverait sans peine des règles analogues aux précédentes pour reconnaître si une intégrale définie est finie ou infinie, quand l'une des limites est infinie.