JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUISEUX

Note sur le mouvement d'une chaîne pesante infiniment mince sur la cycloïde

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 71-72.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__71_0>

NOTE
SUR LE MOUVEMENT
D'UNE CHAINE PESANTE INFINIMENT MINCE SUR LA CYCLOÏDE;

Par M. PUISEUX,

Ancien Élève de l'École normale.

Nous prendrons pour origine des coordonnées le sommet de la cycloïde, pour axe des x l'axe de la courbe supposé vertical, pour axe des y la tangente au sommet. Le premier de ces axes est dirigé en sens contraire de la pesanteur, dans la concavité de la cycloïde.

Concevons maintenant qu'une chaîne pesante se meuve sur cette courbe. Nous nommerons centre de la chaîne le point de celle-ci qui jouit de la propriété d'être son centre de gravité lorsqu'elle est tendue en ligne droite, et nous désignerons par les lettres σ et s les arcs compris, l'un entre ce centre et le sommet de la cycloïde, l'autre entre ce même centre et un point quelconque de la chaîne. Si donc on appelle m la masse de l'élément qui répond à l'arc s, on aura

$$\sum ms = 0.$$

Cela posé, si l'on remarque que $\frac{d\sigma}{dt}$ est la vitesse commune de tous les points de la chaîne, on aura, par le principe des forces vives,

$$\frac{d\sigma^2}{dt^2}\sum m = \text{constante} - 2g\sum mx.$$

Or, d'après une propriété connue de la cycloïde, on a, en désignant par a le diamètre du cercle générateur,

$$s + \sigma = 2\sqrt{ax},$$

d'où

$$x = \frac{(s+\sigma)^2}{4a}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente, on trouve

$$\frac{d\sigma^2}{dt^2}\sum m = \text{constante} - \frac{g}{2a}\sum ms^2 - \frac{g\sigma}{a}\sum ms - \frac{g\sigma}{2a}\sum m.$$

Comme on l'a déjà remarqué, $\sum ms = 0$; de plus le terme $\frac{g}{2a}\sum ms^2$ est constant. Si donc on désigne par h^2 une constante, l'équation précédente pourra s'écrire

$$\frac{d\sigma^2}{dt^2} = \frac{g}{2a}(h^2 - \sigma^2),$$

ce qui est l'équation du mouvement d'un point pesant isolé sur la cycloïde. Ainsi le centre de la chaîne oscillera sur cette courbe, comme s'il était seul.